ГЛАВА XIV

КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПАКТНЫХ И РЕДУКТИВНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Теперь мы возвращаемся к первоначально поставленной задаче об описании всех компактных групп Ли. Классификация, изложенная в предыдущей главе, имела своей исходной точкой чисто алгебраические соображения и потому, естественно, не включала компактных групп, ибо понятие компактности существенно топологическое. Тем не менее (и это является любопытной особенностью групп Ли), как увидим в начале данной главы, существует возможность дать характеристику класса компактных групп Ли в терминах алгебры Ли.

Если G — компактная группа Ли, то ввиду глобальной теоремы ее присоединенное представление вполне приводимо. Следовательно, всякая компактная группа Ли редуктивна. Поэтому ее комплексная оболочка также редуктивна. Поскольку над комплексным полем задача классификации решается технически проще (примеры этого мы видели в предыдущей главе), естественно начать с классификации комплексных редуктивных алгебр Ли. Отбрасывая центр, мы можем также ограничиться рассмотрением *полупростых комплексных* алгебр Ли. Во всяком случае таким путем мы не пропустим ни одной «компактной» алгебры Ли.

Задачу можно было бы несколько упростить, если заранее воспользоваться условием компактности. Однако интересно выяснить также местоположение компактных групп Ли среди редуктивных, и поэтому естественно решать сразу более общую задачу. При этом мы увидим (a posteriori), что все редуктивные группы (алгебры) Ли в известном смысле «порождаются» компактными.

§ 90. Компактные алгебры Ли

Начнем с алгебраической характеристики компактной группы Ли.

Определение 1. Вещественная алгебра Ли X называется *компактной*, если на X существует скалярное

произведение $\{x, y\}$, относительно которого операторы D_a кососимметричны:

$$\{D_a x,\ y\} + \{x,\ D_a y\} = 0, \qquad a,\ x,\ y \in X.$$

Напомним, что скалярное произведение есть симметричная билинейная форма, которая является строго положительно определенной, т. е. $\{x, x\} > 0$ при $x \neq 0$. Исследуем связь введенного определения с понятием компактной группы Ли.

Пусть X — компактная алгебра Ли и Z — ее центр. Нетрудно видеть, что алгебра X редуктивна (действительно, всякое инвариантное подпространство имеет инвариантное ортогональное дополнение); следовательно,

$$X = Y \oplus Z,$$

где алгебра Y полупроста (см. § 83). Пусть G_Y — группа всех невырожденных линейных преобразований в пространстве Y, для которых

1° $\{gx,\ gy\} = \{x,\ y\},\ x,\ y \in X;$

2° $[gx,\ gy] = [x,\ y],\ x,\ y \in X.$

Здесь $\{x, y\}$ — скалярное произведение и $[x, y]$ — коммутатор в алгебре Y. Как следует из условия 1°, группа G_Y является подгруппой в группе $O(Y)$ всех ортогональных преобразований пространства Y. Как следует из 1° и 2°, группа G_Y является замкнутой подгруппой в $O(Y)$.

Найдем алгебру Ли группы G_Y. Согласно условию 2° всякое инфинитезимальное преобразование этой группы является дифференцированием в Y. Согласно теореме 6 (§ 87) это дифференцирование является внутренним. Следовательно, алгеброй Ли группы G_Y является $\hat{Y}$, где $\hat{Y}$ — множество всех операторов $\hat{y} = D_y$, $y \in Y$. Поскольку алгебра Y полупроста, ее представление D_y является точным. Следовательно, $\hat{Y}$ изоморфно Y.

Заметим теперь, что G_Y является компактной группой Ли (как замкнутая подгруппа компактной группы $O(Y)$*)). Следовательно, мы показали, что существует

*) См по этому поводу теоремы 3, 4 § 99.

компактная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна алгебре Y.

Далее, пусть m — размерность центра Z и G_Z — m-мерный тор, т. е. прямое произведение m экземпляров группы вращений окружности. Тогда коммутативную алгебру Z мы можем рассматривать как алгебру Ли группы G_Z. Положим, наконец,

$$G_X = G_Y \times G_Z.$$

Группа G_X является компактной группой Ли, алгеброй Ли которой является $Y + Z$, причем как Y, так и Z являются идеалами в этой алгебре. Следовательно, алгебра Ли группы G_X изоморфна алгебре X.

С другой стороны, пусть G — произвольная компактная группа Ли и X — ее алгебра Ли. В силу глобальной теоремы алгебра X редуктивна. Положим снова

$$X = Y + Z,$$

где Z — центр алгебры X и алгебра Y полупроста. Пусть (x, y) — билинейная форма Киллинга — Картана на подалгебре Y, $(x, y) = \operatorname{sp} D_x D_y$. Положим для краткости $A = D_x$ при фиксированном x. Тогда мы имеем

$$(x, x) = \operatorname{sp} A^2 = \sum_{i,j} A_{ij} A_{ji} = -\sum_{i,j} A_{ij}^2 \leqslant 0.$$

Здесь A_{ij} — матрица оператора A относительно некоторого фиксированного базиса в Y; $A_{ij} = -A_{ji}$ в силу кососимметричности оператора $A = D_x$. Равенство $(x, x) = 0$ возможно в алгебре Y только при $x = 0$ *). Следовательно, форма Киллинга — Картана является отрицательно определенной в Y. Положим $\{x, y\}_0 = -(x, y)$ и дополним скалярное произведение $\{x, y\}_0$ до скалярного произведения $\{x, y\}$ во всей алгебре X, добавляя к $\{x, y\}_0$ произвольную симметричную положительно определенную билинейную форму на алгебре Z. В результате получим, что алгебра X является компактной. Суммируя вышесказанное, мы приходим к следующему утверждению:

---

*) Достаточно проверить это свойство для простой алгебры Y. В этом случае $(x, x) = \lambda P(x, x)_0$, $\lambda \neq 0$, где P — оператор усреднения (см. стр. 118 и упражнение 1 на стр. 99) и $(x, x)_0$ — фиксированное скалярное произведение в Y.

Алгебра X является компактной тогда и только тогда, когда она является алгеброй Ли некоторой компактной группы Ли.

Таким образом, определение 1 действительно дает искомую алгебраическую характеристику компактной группы Ли.

Замечание. Термин «компактность», примененный в определении 1, разумеется, должен пониматься в совершенно независимом смысле по отношению к обычной топологической терминологии. (Во всяком случае, алгебра X как линейное пространство не является компактной.)

В заключение этого параграфа заметим, что если алгебра проста, то скалярное произведение $\{x, y\}$ определяется однозначно с точностью до множителя. Действительно, мы видели в § 20, что скалярное произведение, инвариантное по отношению к некоторому представлению (в нашем случае $\exp D_x$), определяется однозначно с точностью до множителя, если представление неприводимо. Следовательно, в этом случае

$$\{x, y\} = k(x, y),$$

где k отрицательно (действительно, если алгебра X компактна и полупроста, то, как мы видели выше, форма Киллинга — Картана является отрицательно определенной). Следовательно, если алгебра X полупроста, то скалярное произведение $\{x, y\}$ определяется однозначно (с точностью до множителя) на каждой простой компоненте в X.

Теперь мы можем поставить задачу о дальнейшей классификации компактных алгебр Ли. Как отмечалось в начале главы, вместо этой задачи естественно рассматривать задачу о классификации всех полупростых (или даже простых) комплексных алгебр Ли. К решению этой задачи мы теперь переходим.

Упражнение

Показать, что алгебра X является компактной тогда и только тогда, когда при некотором выборе базиса структурные константы c_{ij}^k кососимметричны по всем трем индексам $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.