построением данного параграфа, мы отметим следующую специфику этого частного случая:

1. *Все ненулевые корни различны, т. е. соответствующие корневые подпространства одномерны.*

2. *Корни* $\omega_i = \alpha_{i,\,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *порождают путем сложения все остальные положительные корни* α_{ij}.

3. *Корневые векторы* $\varepsilon_i = e_{i,\,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *порождают при коммутировании всю алгебру* X_+.

Важно заметить также, что корни α_{ij} имеют *целые* координаты относительно некоторого базиса. В следующем параграфе мы исследуем аналогичные вопросы в общем случае.

§ 92. Базис Картана — Вейля

Если выбрать базис в алгебре H и корневых подпространствах X_α, $\alpha \neq 0$, то мы получим базис во всей алгебре X. Найдем соотношения коммутации между элементами этого базиса. Прежде всего докажем, что имеет место

Теорема 2. *Пусть X — полупростая комплексная алгебра Ли. Тогда*:

1° *Все корневые подпространства X_α, $\alpha \neq 0$, одномерны.*

2° *Линейная оболочка* θ *трех векторов* $e \in X_\alpha$, $f \in X_{-\alpha}$, $k = [e, f]$, $(e, f) \neq 0$, *образует в алгебре X трехмерную подалгебру, изоморфную* $\mathrm{sl}(2)$.

3° *Если нормировать векторы e, f условием* $(e, f) = 1$, *то* $\alpha(h) = (k, h)$ *для всякого* $h \in H$.

Доказательство. Поскольку форма Киллинга — Картана невырождена на паре $(X_\alpha, X_{-\alpha})$, то существует пара векторов $e \in X_\alpha$, $f \in X_{-\alpha}$, для которых $(e, f) \neq 0$. Нормируем эти векторы условием $(e, f) = 1$ и положим

$$k = [e, f].$$

Докажем, что $k \neq 0$. Для этого рассмотрим произвольный элемент $h \in H$ и заметим, что (в силу теоремы 1) $[h, e] = \alpha(h) e$. Следовательно,

$$(h, k) = (h, D_e f) = -(D_e h, f) = \alpha(h)(e, f) = \alpha(h).$$

Поскольку корень α ненулевой, то существует вектор $h \in H$, для которого $\alpha(h) \neq 0$. Следовательно, $k \neq 0$. Далее, в силу теоремы 1 векторы e, f являются собственными относительно $\hat{k}$:

$$[k, e] = \mu e, \quad [k, f] = -\mu f,$$

где $\mu = \alpha(k)$ — значение корня α на векторе k. Если $\mu = 0$, то согласно общей формуле, полученной в конце § 86, мы имеем $\lambda(k) = 0$ для каждого корня λ. Отсюда, как и на стр. 394, следовало бы, что $k = 0$. В результате $\mu \neq 0$. Полагая

$$e_+ = \frac{e}{\sqrt{\mu/2}}, \quad e_0 = \frac{k}{\mu}, \quad e_- = \frac{f}{\sqrt{\mu/2}},$$

получаем, как легко проверить, закон коммутации в алгебре $\mathrm{sl}(2)$. Следовательно, алгебра $\theta = \{e, f, k\}$ изоморфна $\mathrm{sl}(2)$. Далее, рассмотрим линейное пространство

$$Z = \theta + X'_\alpha + X_{2\alpha} + X_{3\alpha} + \ldots,$$

где X'_α — дополнение в X_α к направлению вектора $e \in X_\alpha$. Подпространство Z инвариантно относительно $\hat{k}$, и след оператора $\hat{k}$ в этом подпространстве есть $\mu(n'_\alpha + n_{2\alpha} + n_{3\alpha} + \ldots)$, где $n'_\alpha = \dim X'_\alpha$, $n_\beta = \dim X_\beta$. С другой стороны, след коммутатора равен нулю, откуда $n'_\alpha = n_{2\alpha} = n_{3\alpha} = \ldots = 0$. В частности,

$$\dim X_\alpha = 1,$$

и если $\alpha \neq 0$ является корнем, то 2α, 3α, ... уже не являются корнями алгебры X. Теорема доказана.

Замечание 1. Помимо утверждений, включенных в формулировку теоремы, мы доказали еще следующее утверждение:

4° *Единственными кратными корня α в алгебре X являются корни 0, $\pm\alpha$. Если $\alpha \neq 0$, то $(\alpha, \alpha) \neq 0$.*

Следствие. *В алгебре X существует базис из элементов $h \in H$ и корневых векторов e_α, $\alpha \neq 0$, где e_α — произвольный ненулевой вектор из X_α.*

Полученный базис называется *базисом Картана — Вейля*. В нем мы можем непосредственно выписать все соотношения коммутации. Коммутатор $k_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$, для

которого имеет место тождество $\alpha(h) = (h, k_\alpha)$, мы условимся отождествлять с корнем α и обозначим тем же символом α. Тогда имеем

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha, \quad [h, e_\alpha] = (h, \alpha) e_\alpha,$$
$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}.$$

Последнее равенство вытекает из общего правила коммутации между X_α, X_β с учетом одномерности $X_{\alpha+\beta}$. При этом, разумеется, $N_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha + \beta$ не является корнем. Для окончательного описания законов коммутации достаточно найти коэффициенты $N_{\alpha\beta}$. Мы докажем пока только следующее утверждение:

5° *Если $\alpha + \beta$ является корнем, то $N_{\alpha\beta} \neq 0$.*

Для доказательства достаточно заметить, что $N_{\alpha\beta}$ является матричным элементом трехчленной алгебры $\theta = \{e_{-\alpha}, \alpha, e_\alpha\}$. Точнее, пусть p и q — минимальное и максимальное из целых чисел n, для которых $\beta + n\alpha$ является корнем, и Y — линейная оболочка корневых векторов $e_{\beta+n\alpha}$, $p \leqslant n \leqslant q$. Тогда подпространство Y инвариантно относительно D_x, $x \in \theta$, и вектор $e_{\beta+n\alpha}$ является собственным вектором относительно D_α с собственным значением $(\beta, \alpha) + n(\alpha, \alpha)$. Заменяя, как при доказательстве теоремы 2, α на $e_0 = \alpha/(\alpha, \alpha)$, получаем цепочку собственных значений вида $c + n$, $p \leqslant n \leqslant q$, $c = (\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$. Согласно теории представлений алгебры $\mathrm{sl}(2)$ это возможно только в том случае, когда такая цепочка симметрична относительно нуля и представление в пространстве Y неприводимо. При этом все веса $c + n$ должны встречаться без пропусков и «повышающий» оператор $\hat{e}_\alpha$ должен быть отличен от нуля на каждом весовом базисном векторе, за исключением старшего. Поскольку $\hat{e}_\alpha e_\beta = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$, мы получаем нужное утверждение.

Замечание 2. Отметим некоторые свойства симметрии коэффициентов $N_{\alpha\beta}$. Прежде всего $N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}$ за счет антисимметричности коммутатора $[e_\alpha, e_\beta]$. Далее, пусть α, β, γ — ненулевые корни, для которых $\alpha+\beta+\gamma = 0$; тогда из тождества Якоби для элементов e_α, e_β, e_γ находим

$$N_{\beta\gamma}\alpha + N_{\gamma\alpha}\beta + N_{\alpha\beta}\gamma = 0.$$

С другой стороны, $\alpha+\beta+\gamma=0$, т. е. корни α, β, γ лежат в пересечении двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают, то корни α, β, γ коллинеарны, откуда ввиду условия $\alpha+\beta+\gamma=0$ и свойства 4° заключаем, что хотя бы один из корней обращается в нуль. Поскольку этот случай исключен, то $N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}=N_{\alpha\beta}$.

Замечание 3. Из свойства симметрии для цепочки $c+n$, построенной при доказательстве утверждения 5°, заключаем, в частности, что $c+p=-(c+q)$, т. е.

$$p+q=-\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}. \qquad (*)$$

Здесь p и q — минимальное и максимальное из целых чисел, для которых $\beta+n\alpha$ является корнем. Мы существенно воспользуемся этим замечанием в дальнейшем.

§ 93. Простые корни

Пусть r — размерность картановской подалгебры H. Как следует из определения этой подалгебры, число r является инвариантной характеристикой алгебры X (не зависящей от выбора H). Это число называется *рангом* алгебры X. Покажем вначале, что имеет место следующее утверждение:

1° *Среди корней подалгебры H имеется ровно r линейно независимых.*

Действительно, если $z\perp\alpha$ для всех значений α и $z\in H$, то $\alpha(z)=(\alpha,z)=0$ для всякого корня α, откуда $(z,h)=0$, $h\in H$, т. е. $z=0$ (поскольку форма Киллинга — Картана невырождена на подалгебре H). Следовательно, линейная оболочка всех корней $\alpha\in H$ совпадает со всей алгеброй H.

Исследуем несколько подробнее геометрические свойства системы корней.

2° *Пусть H_0 — вещественная линейная оболочка системы всех корней. Тогда форма Киллинга — Картана является (строго) положительно определенной на H_0 и (α,β) рационально для каждой пары корней α, β.*

Действительно, если $\alpha\neq 0$, то $\alpha=[e_\alpha,e_{-\alpha}]$ и скалярный квадрат элемента α может быть вычислен по