С другой стороны, $\alpha+\beta+\gamma=0$, т. е. корни α, β, γ лежат в пересечении двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают, то корни α, β, γ коллинеарны, откуда ввиду условия $\alpha+\beta+\gamma=0$ и свойства 4° заключаем, что хотя бы один из корней обращается в нуль. Поскольку этот случай исключен, то $N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}=N_{\alpha\beta}$.

Замечание 3. Из свойства симметрии для цепочки $c+n$, построенной при доказательстве утверждения 5°, заключаем, в частности, что $c+p=-(c+q)$, т. е.

$$p+q=-\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}. \qquad (*)$$

Здесь p и q — минимальное и максимальное из целых чисел, для которых $\beta+n\alpha$ является корнем. Мы существенно воспользуемся этим замечанием в дальнейшем.

§ 93. Простые корни

Пусть r — размерность картановской подалгебры H. Как следует из определения этой подалгебры, число r является инвариантной характеристикой алгебры X (не зависящей от выбора H). Это число называется *рангом* алгебры X. Покажем вначале, что имеет место следующее утверждение:

1° *Среди корней подалгебры H имеется ровно r линейно независимых.*

Действительно, если $z\perp\alpha$ для всех значений α и $z\in H$, то $\alpha(z)=(\alpha,z)=0$ для всякого корня α, откуда $(z,h)=0$, $h\in H$, т. е. $z=0$ (поскольку форма Киллинга — Картана невырождена на подалгебре H). Следовательно, линейная оболочка всех корней $\alpha\in H$ совпадает со всей алгеброй H.

Исследуем несколько подробнее геометрические свойства системы корней.

2° *Пусть H_0 — вещественная линейная оболочка системы всех корней. Тогда форма Киллинга — Картана является (строго) положительно определенной на H_0 и (α,β) рационально для каждой пары корней α, β.*

Действительно, если $\alpha\neq 0$, то $\alpha=[e_\alpha,e_{-\alpha}]$ и скалярный квадрат элемента α может быть вычислен по

общему правилу, указанному в конце § 86:

$$(\alpha, \alpha) = \operatorname{sp} D_\alpha^2 = \rho_2 (\alpha, \alpha)^2.$$

Здесь в правой части этого равенства скалярное произведение (α, α) рассматривается как значение линейной формы α на векторе $\alpha \in H$. Поскольку $(\alpha, \alpha) \neq 0$, то мы имеем

$$(\alpha, \alpha) = \frac{1}{\rho_2} > 0.$$

Следовательно, (α, α) есть положительное рациональное число. Далее, если β — корень, то $(\beta, \alpha) = \beta(\alpha) = r \cdot \alpha(\alpha) = r(\alpha, \alpha)$, где r — рациональное число (см. конец § 86). Следовательно, значение (α, β) является рациональным для каждой пары корней α, β. Отсюда также заключаем, что *форма Киллинга — Картана является вещественной на* H_0. Наконец, если $x \in H_0$, то мы имеем

$$(x, x) = \operatorname{sp} D_x^2 = \sum_\alpha (\alpha, x)^2 \geqslant 0.$$

Равенство $(x, x) = 0$ возможно только при $x = 0$. Следовательно, *форма Киллинга — Картана является (строго) положительно определенной на* H_0.

Введем теперь следующее

Определение 3. Положительный корень ω называется *простым*, если его невозможно представить в виде суммы двух положительных корней.

Теорема 3. *Простые корни образуют базис в картановской подалгебре H. Всякий корень α однозначно записывается в виде $\sum_{i=1}^{r} m_i \omega_i$, где ω_i — простые корни и m_i — целые числа одинакового знака.*

Доказательство. Если α — положительный корень, то возможность его представления в виде суммы простых корней с неотрицательными целыми коэффициентами очевидна. Действительно, если корень α не простой, то $\alpha = \beta + \gamma$, где β и γ — положительные корни, причем, очевидно, $\beta < \alpha$, $\gamma < \alpha$ (относительно лексикографической упорядоченности в H). Следовательно, наше утверждение доказывается путем конечной индук-

ции. Остается проверить, что простые корни линейно независимы.

Согласно замечанию, сделанному в конце § 92, для каждой пары корней α, β имеет место следующая формула:

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = -(p+q),$$

где p и q — минимальное и максимальное из целых чисел n, для которых $\beta + n\alpha$ является корнем. Допустим, в частности, что α, β — простые корни. Тогда их разность $\beta - \alpha = \gamma$ не может быть ни положительным, ни отрицательным корнем (в противном случае один из данных корней оказался бы непростым). Следовательно, в этом случае $p = 0$ и мы получаем

$$(\alpha, \beta) = -\frac{q}{2}(\alpha, \alpha) \leqslant 0.$$

Следовательно, если $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ — простые корни, то их попарные скалярные произведения либо равны нулю, либо отрицательны. Рассмотрим теперь произвольное линейное соотношение между этими корнями:

$$\lambda^i \omega_i = 0.$$

Здесь λ^i — произвольные комплексные числа. Умножая скалярно на ω_j, получаем систему числовых уравнений для определения коэффициентов λ^i:

$$\lambda^i (\omega_i, \omega_j) = 0.$$

Поскольку матрица этой системы действительна, то вместе с числами λ^i числа $\operatorname{Re}\lambda^i$, $\operatorname{Im}\lambda^i$ также являются решениями этой системы. Следовательно, можем рассматривать только решения в классе действительных чисел. Запишем исходное уравнение в виде

$$a^i \omega_i = b^j \omega_j,$$

где числа a^i, b^j неотрицательны и корни, входящие слева и справа с ненулевыми коэффициентами, различны. Пусть x — общее значение обеих частей этого уравнения. Поскольку $x \in H_0$, то мы имеем $(x, x) \geqslant 0$.

С другой стороны, $(\omega_i, \omega_j) \leqslant 0$ при $i \neq j$, $a^i b^j \geqslant 0$, $a^i b^i = 0$, откуда имеем

$$(x, x) = a^i b^j (\omega_i, \omega_j) \leqslant 0.$$

В результате $x = 0$. Поскольку $\omega_i > 0$, заключаем отсюда, что $a^i = b^j = 0$. Следовательно, наша система допускает только нулевые решения. Теорема доказана.

Специально отметим важное геометрическое свойство простых корней, полученное при доказательстве этой теоремы:

3° *Все простые корни алгебры X расположены в вещественном евклидовом пространстве H_0 попарно под прямым или тупым углом*: $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ *при* $\alpha \neq \beta$.

Для всех элементов из H_0 и, в частности, для всех корней понятие лексикографической упорядоченности можно рассматривать по отношению к базису ω_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ *).

4° *Всякий положительный корень либо является простым, либо может быть представлен в виде суммы положительного и простого корней.*

Действительно, пусть β — положительный корень, $\beta = \sum_{i=1}^{r} m_i \omega_i$, $m_i \geqslant 0$. Если $(\beta, \omega_i) \leqslant 0$ для всех простых корней ω_i, то $(\beta, \beta) = \sum_{i=1}^{r} m_i (\beta, \omega_i) \leqslant 0$, откуда $\beta = 0$. Следовательно, если β не простой корень, то $(\beta, \alpha) > 0$ хотя бы для одного простого корня $\alpha = \omega_i$. Тогда из равенства (*) § 92 находим, что $p + q < 0$. Поскольку q не может быть отрицательно, то $p < 0$. Следовательно, вектор $\gamma = \beta - \omega_i$ является корнем. Так как корень ω_i простой, то корень γ не может быть отрицательным. Следовательно, $\beta = \gamma + \omega_i$, $\gamma > 0$.

5° *Если известна система Π всех простых корней, то по ней однозначно может быть восстановлена система Δ всех ненулевых корней алгебры X.*

Действительно, рассмотрим вначале систему Δ^+ всех положительных корней. Запишем всякий корень $\alpha \in \Delta^+$

---

*) Иногда вместо базиса ω_i удобно рассматривать «дуальный базис», состоящий из векторов ∂^i, $i = 1, 2, \ldots, r$, для которых $(\partial^i, \omega_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

в виде $\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i\omega_i$ и назовем число $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$ порядком этого корня. Множество всех корней порядка 1 совпадает с системой Π. Пусть Π_m — множество всех корней порядка m. Если система Π_m уже описана, то для описания Π_{m+1} достаточно, согласно свойству 4°, перечислить все пары $\beta \in \Pi_m$, $\alpha = \omega_i \in \Pi$, для которых вектор $\gamma = \beta + \alpha$ является корнем. Отбросим тривиальный случай $\beta = \alpha$. Тогда мы имеем $\beta = \sum_{j \neq i} m_j\omega_j + m_i\omega_i$, где хотя бы одно из чисел m_j положительно. Следовательно, вектор $\beta + n\alpha$ является корнем только при $m_i + n \geqslant 0$. Если $n \leqslant 0$, то корень $\beta + n\alpha$ имеет порядок $m + n \leqslant m$, и такие корни нам уже известны. Следовательно, нам известно число $p = \min(n)$, где min берется по тем значениям n, для которых $\beta + n\alpha$ является корнем. Тогда из равенства (*) § 92 находим $q = \max(n)$. Вектор $\beta + \alpha$ является корнем только при $q \geqslant 1$.

§ 94. Структурная матрица Картана

Пусть $\Pi = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$ — система простых корней алгебры X. Множество целых чисел

$$c_{ij} = \frac{2(\omega_i, \omega_j)}{(\omega_i, \omega_i)} \qquad (*)$$

несет в себе информацию о геометрии системы Π. Матрица $c = \|c_{ij}\|$ называется *структурной матрицей Картана*.

Теорема 4. *Если две полупростые комплексные алгебры Ли имеют одну и ту же структурную матрицу Картана, то они изоморфны.*

Доказательство. Пусть X, Y — две полупростые комплексные алгебры Ли. Из совпадения структурных матриц Картана следует, в частности, что эти алгебры имеют одинаковый ранг. Кроме того, существует взаимно однозначное соответствие между подсистемами простых корней в X и Y. Заметим, что знание чисел (*) позволяет определить длины векторов ω_i с точностью до общего множителя $\lambda > 0$. Далее, согласно свойству 5° из