в виде $\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i\omega_i$ и назовем число $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$ порядком этого корня. Множество всех корней порядка 1 совпадает с системой Π. Пусть Π_m — множество всех корней порядка m. Если система Π_m уже описана, то для описания Π_{m+1} достаточно, согласно свойству 4°, перечислить все пары $\beta \in \Pi_m$, $\alpha = \omega_i \in \Pi$, для которых вектор $\gamma = \beta + \alpha$ является корнем. Отбросим тривиальный случай $\beta = \alpha$. Тогда мы имеем $\beta = \sum_{j \neq i} m_j\omega_j + m_i\omega_i$, где хотя бы одно из чисел m_j положительно. Следовательно, вектор $\beta + n\alpha$ является корнем только при $m_i + n \geqslant 0$. Если $n \leqslant 0$, то корень $\beta + n\alpha$ имеет порядок $m + n \leqslant m$, и такие корни нам уже известны. Следовательно, нам известно число $p = \min(n)$, где min берется по тем значениям n, для которых $\beta + n\alpha$ является корнем. Тогда из равенства (*) § 92 находим $q = \max(n)$. Вектор $\beta + \alpha$ является корнем только при $q \geqslant 1$.

§ 94. Структурная матрица Картана

Пусть $\Pi = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$ — система простых корней алгебры X. Множество целых чисел

$$c_{ij} = \frac{2(\omega_i, \omega_j)}{(\omega_i, \omega_i)} \qquad (*)$$

несет в себе информацию о геометрии системы Π. Матрица $c = \|c_{ij}\|$ называется *структурной матрицей Картана*.

Теорема 4. *Если две полупростые комплексные алгебры Ли имеют одну и ту же структурную матрицу Картана, то они изоморфны.*

Доказательство. Пусть X, Y — две полупростые комплексные алгебры Ли. Из совпадения структурных матриц Картана следует, в частности, что эти алгебры имеют одинаковый ранг. Кроме того, существует взаимно однозначное соответствие между подсистемами простых корней в X и Y. Заметим, что знание чисел (*) позволяет определить длины векторов ω_i с точностью до общего множителя $\lambda > 0$. Далее, согласно свойству 5° из

предыдущего параграфа существует также взаимно однозначное соответствие между системами корней в X и Y. Очевидно, это соответствие является изометрией с точностью до множителя λ. Пусть α, β — произвольные корни алгебры X. Тогда имеем

$$(\alpha, \beta) = \operatorname{sp} D_\alpha D_\beta = \sum_\gamma (\alpha, \gamma)(\gamma, \beta).$$

Такое же соотношение должно выполняться для алгебры Y. Нетрудно видеть, что это возможно только при $\lambda = 1$. Теперь мы попросту можем отождествить системы корней в X и Y. Используя базис Картана — Вейля, заключаем, что X и Y изоморфны как линейные пространства. Далее, условимся, что корневые векторы $e_\alpha \in X$, $f_\alpha \in Y$ нормированы одним и тем же соотношением $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = (f_\alpha, f_{-\alpha}) = 1$; тогда $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = [f_\alpha, f_{-\alpha}] = \alpha$, и остается исследовать соотношения коммутации вида $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$, $[f_\alpha, f_\beta] = N'_{\alpha\beta} f_{\alpha+\beta}$.

Покажем, что за счет перенормировки базиса f_α можно добиться выполнения равенства $N_{\alpha\beta} = N'_{\alpha\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$. Заметим, что множество Δ вполне упорядочено. Введем обозначение Δ_ρ для множества всех ненулевых корней α, для которых $-\rho < \alpha < \rho$, $\rho \in \Delta^+$. Если корень σ непосредственно следует за ρ, то мы имеем

$$\Delta_\sigma = \{-\rho\} + \Delta_\rho + \{\rho\}.$$

Следовательно, в нашем распоряжении имеется возможность конечной индукции по возрастающему индексу ρ. Допустим, что равенство $N_{\alpha\beta} = N'_{\alpha\beta}$ уже доказано для всех корней α, β таких, что $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta_\rho$. Добавляя корень ρ, мы приходим к рассмотрению троек α, β, $\alpha + \beta \in \Delta_\sigma$, у которых хотя бы один из элементов совпадает с $\pm\rho$. Полагая $\alpha + \beta = -\gamma$, приходим к рассмотрению троек $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta_\sigma$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$, у которых хотя бы один из элементов совпадает с $\pm\rho$. Ясно, что этим свойством может обладать лишь один из элементов α, β, γ. Рассмотрим отдельно следующие возможные случаи.

1. Корень ρ невозможно представить в виде суммы $\alpha + \beta$, $\alpha, \beta \in \Delta_\rho$. В этом случае корень ρ вообще невозможно представить в виде суммы двух по-

ложительных корней (т. е. он является простым), и для векторов $f_{-\rho}$, f_ρ мы выбираем произвольную нормировку с учетом равенства $(f_\rho, f_{-\rho}) = 1$.

2. Существует единственная пара векторов $\alpha, \beta \in \Delta_\rho$, для которых $\alpha + \beta = \rho$. Ввиду соотношений симметрии $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha}$ при $\gamma = -\rho$, доказанных в § 92, мы можем ограничиться рассмотрением констант $N_{\alpha\beta}$, $N'_{\alpha\beta}$. Вычисляя коммутатор $[f_\alpha, f_\beta]$, мы нормируем вектор f_ρ так, чтобы выполнялось равенство

$$[f_\alpha, f_\beta] = N_{\alpha\beta} f_\rho.$$

Следовательно, в этом случае $N_{\alpha\beta} = N'_{\alpha\beta}$. Нормируем теперь $f_{-\rho}$, исходя из условия $(f_\rho, f_{-\rho}) = 1$, и покажем, что при этом выполняется также равенство $N_{-\alpha, -\beta} = N'_{-\alpha, -\beta}$. Для этого заметим, что

$$[e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_\beta]] = N_{\alpha\beta} N_{-\alpha, -\gamma} e_\beta = -N_{\alpha\beta} N_{-\alpha, -\beta} e_\beta,$$

где $-\gamma = \alpha + \beta$. Действительно, в силу условия $\alpha + \beta + \gamma = 0$ мы имеем $N_{-\alpha, -\gamma} = N_{-\beta, -\alpha} = -N_{-\alpha, -\beta}$. Разделим обе части этого равенства на $(\alpha, \alpha)/2$; тогда элементы $e_{-\alpha}$, e_α мы можем заменить нормированными элементами e_-, e_+, введенными при доказательстве теоремы 2. Тогда полученное равенство запишется в виде $\hat{e}_- \hat{e}_+ f = \lambda f$, где $f = e_\beta$. Собственное значение λ не зависит от нормировки вектора f и определяется только законами представлений трехчленной алгебры $\mathrm{sl}(2)$. Следовательно,

$$N_{\alpha\beta} N_{-\alpha, -\beta} = N'_{\alpha\beta} N'_{-\alpha, -\beta},$$

и отсюда вытекает наше утверждение. В результате получаем равенства $N_{\alpha\beta} = N'_{\alpha\beta}$, $N_{-\alpha, -\beta} = N'_{-\alpha, -\beta}$.

3. Наряду с рассмотренной парой корней α, β существует также другая пара α', β', для которой $\alpha' + \beta' = \rho$, α', $\beta' \in \Delta_\rho$. Нормировку векторов $f_{-\rho}$, f_ρ производим, как и выше (по отношению к паре α, β). Положим $\gamma = -\alpha'$, $\delta = -\beta'$. Тогда $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, и ни одна из попарных сумм этих корней не обращается в нуль. Применяя тождество Якоби к

элементам e_α, e_β, e_γ, легко получаем равенство

$$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta} + N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta} = 0.$$

Такое же равенство должно иметь место для $N'_{\alpha\beta}$, $N'_{\gamma\delta}$, ... Заметим, что $\beta+\gamma$, $\alpha+\delta$, $\gamma+\alpha$, $\beta+\delta \in \Delta_\rho$. Следовательно, в последних двух членах получаемой суммы штрихи можно опустить. В результате $N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta} = N_{\alpha\beta}N'_{\gamma\delta}$ (напомним, что $N_{\alpha\beta} = N'_{\alpha\beta}$), и отсюда $N_{\gamma\delta} = N'_{\gamma\delta}$. Аналогично, $N_{-\gamma,\,-\delta} = N'_{-\gamma,\,-\delta}$.

Теорема доказана.

Следствие. *Всякий автоморфизм* *) *подалгебры H, сохраняющий систему корней, может быть продолжен до автоморфизма всей алгебры X, т. е. до линейного отображения $f(x)$, при котором $[f(x), f(y)] = f([x, y])$.*

Замечание 1. Пусть $M = \|(\alpha, \beta)\|$ — матрица скалярных произведений всех корней $\alpha, \beta \in \Delta$. Как мы видели при доказательстве теоремы 4,

$$M = M'M,$$

где штрих означает транспонирование (и также $M = M^2$, поскольку $M = M'$). Поскольку M вещественно, то отсюда вытекает, что матрица M является положительно определенной.

Замечание 2. Применим следствие из теоремы 4 к автоморфизму $f(h) = -h$ в алгебре H. Пусть $f(x)$ — продолжение этого автоморфизма на алгебру X; тогда, очевидно, $f(e_\alpha) = c_\alpha e_{-\alpha}$. Поскольку форма Киллинга — Картана должна сохраняться при автоморфизме, то мы имеем

$$(f(e_\alpha), f(e_{-\alpha})) = (e_\alpha, e_{-\alpha}),$$

откуда $c_\alpha c_{-\alpha} = 1$. Полагая $e_\alpha = \sqrt{c_\alpha}\,\tilde{e}_\alpha$, получаем новые корневые векторы $\tilde{e}_\alpha$, для которых $f(\tilde{e}_\alpha) = \tilde{e}_{-\alpha}$. Следовательно, векторы e_α можно с самого начала считать нормированными так, чтобы отображение

$$\alpha \to -\alpha, \quad e_\alpha \to e_{-\alpha}$$

---

*) Заметим, что автоморфизм коммутативной алгебры Ли есть произвольное линейное невырожденное преобразование в этой алгебре.

определяло автоморфизм всей алгебры X. Иначе говоря, при указанном выборе базиса мы имеем $N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$. Полагая $e_\alpha = i\sqrt{c_\alpha}\,\tilde{e}_\alpha$, мы можем также добиться выполнения равенства $N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$.

Замечание 3. При доказательстве теоремы 4 мы видели, что $N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta} = -\lambda\,\frac{(\alpha,\alpha)}{2}$, где λ — собственное значение оператора $\hat{e}_-\hat{e}_+$ на векторе e_β. Обращаясь к теории представлений алгебры $\mathrm{sl}(2)$, легко находим, что $\lambda = (l-\nu)(l+\nu+1)$, где $l = \nu+q = -(\nu+p)$ — старший вес неприводимого представления $\mathrm{sl}(2)$ в базисе $e_{\beta+n\alpha}$, $p \leqslant n \leqslant q$. Следовательно,

$$N^2_{\alpha\beta} = \frac{q(1-p)}{2}(\alpha,\alpha),$$

если условиться считать, как выше, что $N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$. Поскольку $p \leqslant 0$, $q \geqslant 0$, то мы заключаем, что $N^2_{\alpha\beta} \geqslant 0$, т. е. $N^2_{\alpha\beta}$ — рациональное вещественное число. Известно также ([145]), что при некоторой нормировке базиса все константы $N_{\alpha\beta}$ могут быть сделаны *целыми* *).

§ 95. Простые комплексные алгебры Ли

Резюмируем вначале результаты проведенного исследования.

Теорема 5. *Во всякой полупростой комплексной алгебре X существует базис из элементов h_i, e_α, где элементы h_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, порождают максимальную коммутативную подалгебру H и остальные соотношения коммутации имеют вид*

$$[h, e_\alpha] = (h, \alpha)\,e_\alpha,$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha, \quad [e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}.$$

Здесь индексы α (корни алгебры X) отождествляются с векторами $\alpha \in H$, для которых $\alpha(h) = (h, \alpha)$, и h пробегает H. $N_{\alpha\beta} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha+\beta$ является корнем. Базисные векторы e_α можно нормировать так, чтобы константы $N_{\alpha\beta}$ были вещественными.

---

*) Отсюда вытекает важное заключение о возможности определения алгебры X *над произвольным полем.*