определяло автоморфизм всей алгебры X. Иначе говоря, при указанном выборе базиса мы имеем $N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha,-\beta}$. Полагая $e_\alpha = i\sqrt{c_\alpha}\,\tilde{e}_\alpha$, мы можем также добиться выполнения равенства $N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$.

Замечание 3. При доказательстве теоремы 4 мы видели, что $N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta} = -\lambda\,\frac{(\alpha,\alpha)}{2}$, где λ — собственное значение оператора $\hat{e}_-\hat{e}_+$ на векторе e_β. Обращаясь к теории представлений алгебры $\mathrm{sl}(2)$, легко находим, что $\lambda = (l-\nu)(l+\nu+1)$, где $l = \nu+q = -(\nu+p)$ — старший вес неприводимого представления $\mathrm{sl}(2)$ в базисе $e_{\beta+n\alpha}$, $p \leqslant n \leqslant q$. Следовательно,

$$N^2_{\alpha\beta} = \frac{q(1-p)}{2}(\alpha,\alpha),$$

если условиться считать, как выше, что $N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$. Поскольку $p \leqslant 0$, $q \geqslant 0$, то мы заключаем, что $N^2_{\alpha\beta} \geqslant 0$, т. е. $N^2_{\alpha\beta}$ — рациональное вещественное число. Известно также ([145]), что при некоторой нормировке базиса все константы $N_{\alpha\beta}$ могут быть сделаны *целыми* *).

§ 95. Простые комплексные алгебры Ли

Резюмируем вначале результаты проведенного исследования.

Теорема 5. *Во всякой полупростой комплексной алгебре X существует базис из элементов h_i, e_α, где элементы h_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, порождают максимальную коммутативную подалгебру H и остальные соотношения коммутации имеют вид*

$$[h, e_\alpha] = (h, \alpha)\,e_\alpha,$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha, \quad [e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}.$$

Здесь индексы α (корни алгебры X) отождествляются с векторами $\alpha \in H$, для которых $\alpha(h) = (h, \alpha)$, и h пробегает H. $N_{\alpha\beta} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha+\beta$ является корнем. Базисные векторы e_α можно нормировать так, чтобы константы $N_{\alpha\beta}$ были вещественными.

---

*) Отсюда вытекает важное заключение о возможности определения алгебры X *над произвольным полем.*

Далее, пусть $\Pi = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$ — *система всех простых корней алгебры* X. *Простые корни образуют базис в картановской подалгебре* H. *Система* Π *определяет алгебру* X *с точностью до автоморфизма.*

Перечислим также некоторые дополнительные свойства алгебры X, не включенные в теорему 5.

1° *Алгебра* X *может быть представлена в виде прямой суммы*

$$X = X_- + H + X_+,$$

где X_-, X_+ — *нильпотентные подалгебры в* X, *натянутые соответственно на корневые векторы* e_α, $\alpha < 0$, $\alpha > 0$.

Действительно, $[e_{\alpha_1}, [e_{\alpha_2}, \ldots, [e_{\alpha_{n-1}} e_{\alpha_n}] \ldots]] = 0$ при некотором n, если все корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ отрицательны или все положительны. Следовательно, X_- и X_+ нильпотентны.

2°. *Всякий корень* α *однозначно представляется в виде* $\sum_{i=1}^{r} m_i \omega_i$, *где* m_i — *целые числа одинакового знака. Если* α — *корень, то* $(\alpha, \alpha) > 0$.

Далее, напомним, что картановская подалгебра H определялась нами как максимальная коммутативная подалгебра, содержащая регулярный элемент h_0. Однако теперь нетрудно получить другую характеристику этой подалгебры, более удобную для приложений:

3° *Картановская подалгебра* H *может быть охарактеризована как максимальная коммутативная подалгебра в* X, *все преобразования которой* $(D_h x = [h, x])$ *в алгебре* X *диагонализуются.*

Действительно, если алгебра H обладает указанными свойствами, то для нее возможно повторить построение базиса Картана — Вейля. Пусть $h_0 \in H$ обладает тем свойством, что $(h, \omega_i) \neq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, r$ (очевидно, такой элемент существует). Тогда нетрудно видеть, что h_0 регулярен, т. е. H является картановской подалгеброй.

4° *Если алгебра* X *проста, то для каждого ее линейного представления* $\rho(x)$ *мы имеем*

$$(x, y) = c_\rho \operatorname{sp} \rho(x) \rho(y),$$

где $(x, y) = \operatorname{sp} D_x D_y$ — *билинейная форма Киллинга — Картана и коэффициент* c_ρ *не зависит от* $x, y \in X$.

Действительно, билинейная форма $f(x, y) = \operatorname{sp} \rho(x)\rho(y)$ обладает свойством $f(D_\alpha x, y) + f(x, D_\alpha y) = 0$. Поскольку алгебра X проста, то ее присоединенное представление неприводимо. Отсюда в силу леммы Шура следует, что форма $f(x, y)$ определяется однозначно с точностью до множителя. Следовательно, $f(x, y) = \frac{1}{c}(x, y)$, и мы полагаем $c = c_\rho$.

Рассмотрим, наконец, систему Π всех простых корней алгебры X. Скажем, что система Π *распадается*, если $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$, где корни подсистемы Π' ортогональны корням подсистемы Π''. В качестве несложного упражнения предлагается доказать следующее свойство, выделяющее класс простых комплексных алгебр Ли:

5° *Алгебра* X *является простой тогда и только тогда, когда система* Π *не распадается.*

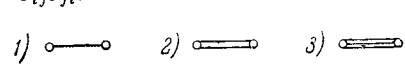
Рассмотрим теперь структурную матрицу Картана: $c_{ij} = 2(\omega_i, \omega_j)/(\omega_i, \omega_i)$, где ω_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, — простые корни алгебры X. Заметим, что

$$c_{ij}c_{ji} = \frac{4(\omega_i, \omega_j)^2}{(\omega_i, \omega_i)(\omega_j, \omega_j)} = 4\cos^2\theta_{ij},$$

где θ_{ij} — угол между векторами ω_i, ω_j (которые рассматриваются в вещественном евклидовом пространстве H_0 с базисом ω_i, $i = 1, 2, \ldots, r$). Поскольку числа c_{ij} являются целыми, то мы заключаем, что

$$c_{ij}c_{ji} = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

либо $c_{ij}c_{ji} = 4$, но тогда $\cos^2\theta_{ij} = 1$, т. е. $\omega_i = \omega_j$. Условимся каждый корень символически изображать кружочком. Если ω_i, ω_j — два различных простых корня, то соответствующие два кружочка мы соединяем одним, двумя или тремя отрезками прямой линии в зависимости от числа $n_{ij} = c_{ij}c_{ji}$:



Если $n_{ij}=0$, то кружочки вообще не соединяются. В этом случае $\cos\theta_{ij}=0$, т. е. $\omega_i \perp \omega_j$. В случаях 1), 2), 3) мы имеем соответственно $\theta_{ij}=120°$, $135°$, $150°$. Действительно, угол между простыми корнями должен быть тупым.

Полученный способ чрезвычайно удобен для символического изображения структурной матрицы Картана. Этот способ был предложен Е. Б. Дынкиным [77]. Если все простые корни алгебры изобразить графически указанным способом, то в результате возникает конечная схема, называемая *схемой Дынкина*.

Поскольку ортогональные корни не связываются линией, то мы получаем наглядную характеристику простых алгебр Ли. *Алгебра X является простой тогда и только тогда, когда ее схема Дынкина не распадается на две подсхемы.* В этом случае каждые два кружочка соединяются между собой хотя бы одной ломаной линией, состоящей из отрезков схемы. Такая схема называется *связной*.

Для классификации всех простых комплексных алгебр Ли достаточно теперь перечислить всевозможные связные схемы Дынкина в r-мерном евклидовом пространстве. Мы не станем заниматься решением этой задачи. См. по этому поводу [128]. Ограничимся иллюстрацией полученных результатов на примере классических алгебр Ли.

Пример 1. Алгебра $\mathrm{sl}(n)$. Мы видели в § 91, что корнями этой алгебры являются линейные формы

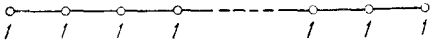
$$\alpha_{ij}(h)=((e_i-e_j),\ h)=\lambda_i-\lambda_j,$$

где $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ с единицей на i-м месте и скобка (x,y) означает скалярное произведение в евклидовом пространстве E_n размерности n. Следовательно, векторы $\alpha_{ij}=e_i-e_j$ мы можем отождествить с корнями $\mathrm{sl}(n)$. Корень α_{ij} является положительным при $i<j$ и отрицательным при $i>j$. Корни

$$\omega_i=\alpha_{i,\,i+1},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

являются простыми. Число $r=n-1$ является *рангом* алгебры $\mathrm{sl}(n)$. Воспользуемся теперь замечанием 4°, согласно которому вместо формы Киллинга — Картана

в H мы можем рассматривать скалярное произведение в E_n. Нетрудно видеть, что $\theta_{i,\,i+1} = 120°$ и $\theta_{ij} = 90°$ во всех остальных случаях. Следовательно, схема Дынкина в данном случае имеет вид



Единицы, стоящие под кружочками, указывают относительную длину (относительно некоторого масштаба) всех простых векторов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$. Действительно, все эти векторы имеют одинаковую длину.

Пример 2. Алгебра $\mathrm{so}(n)$. Вместо суммы квадратов нам будет удобно рассматривать в E_n квадратичную форму (sx, x), где скобка означает обычное скалярное произведение и

$$s = \begin{Vmatrix} 0 & & & & & 1 \\ & & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & 0 \end{Vmatrix}, \qquad s^2 = e.$$

Тогда элементы из $X = \mathrm{so}(n)$ выделяются условием $sx's = -x$, т. е. являются кососимметричными относительно второй диагонали. Положим $n = 2\nu$ или $n = 2\nu + 1$ в зависимости от четности или нечетности размерности n и условимся, что базис нумеруется целыми числами $-\nu, -\nu + 1, \ldots, \nu$, причем индекс 0 пропускается, если n четно. Тогда транспонирование $\tilde{x} = sx's$ относительно второй диагонали задается формулой $\tilde{x}_{ij} = x_{-j,-i}$ для матрицы $x = \|x_{ij}\|_{i,\,j=-\nu,\ldots,\nu}$. Элементы

$$f_{ij} = e_{ij} - e_{-j,\,-i}, \qquad j < -i,$$

где e_{ij} — стандартный базис в классе матриц $n \times n$, образуют базис в алгебре X. Далее, пусть H — совокупность всех диагональных матриц из X. Полагая $h = \sum_{i=-\nu}^{\nu} \lambda_{-i} e_{ii}$, замечаем, что $\lambda_i = -\lambda_{-i}$ в силу условия

кососимметричности; следовательно, также $h = \sum_{i=1} \lambda_i h_i$, где $h_i = f_{-i,-i}$ и собственные значения λ_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, независимы. Имеем

$$[h, f_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) f_{ij}.$$

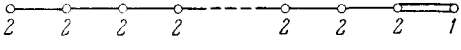
Следовательно, вектор f_{ij} является собственным вектором относительно оператора $\hat{h} = D_h$. Если $j \neq i$, $j > -i$, то линейные формы $\alpha_{ij}(h) = \lambda_i - \lambda_j$ не обращаются тождественно в нуль и попарно различны. Отсюда заключаем, что алгебра H является максимальной коммутативной подалгеброй в X. Согласно 3° алгебра H является картановской подалгеброй в X.

Для вложения корней в картановскую подалгебру H достаточно выразить все корни*) через значения λ_i, λ_j с положительными индексами i, $j = 1, 2, \ldots, \nu$. При этом мы имеем $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j = ((e_i - e_j), h)$, $i < j$; $\alpha_{i,-j} = \lambda_i + \lambda_j = ((e_i + e_j), h)$, $\alpha_{i0} = \lambda_i = (e_i, h)$. Следовательно, корни разбиваются на следующие подгруппы:

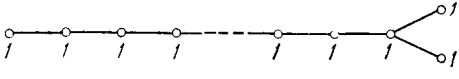
$$\omega_{ij} = e_i - e_j, \quad i < j; \quad \theta_{ij} = e_i + e_j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, \nu;$$

$$\omega_{i0} = e_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu$$

(последнее в случае, когда имеется индекс 0). Согласно замечанию 4° мы можем вместо билинейной формы Киллинга — Картана в H воспользоваться обычным скалярным произведением в E_ν. Если n нечетно, то простыми корнями являются корни $\omega_i = \omega_{i,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, $\omega_\nu = \omega_{\nu 0}$. В этом случае схема Дынкина имеет вид



Если n четно, то в качестве простых корней мы выбираем $\omega_i = \omega_{i,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, $\omega_\nu = \theta_\nu$. В результате получаем схему Дынкина



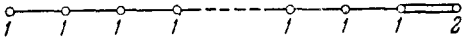
*) В силу соотношения $-\lambda_{-i} = \lambda_i$; здесь мы вписываем только положительные корни.

Из рассмотрения этих схем непосредственно очевидно, что алгебра $\mathrm{so}(n)$, $n = 2\nu + 1$, $n = 2\nu$, имеет ранг ν и является полупростой при $n > 2$. Если $n = 3$, то схема Дынкина содержит единственный кружочек; отсюда снова получаем, что алгебра $\mathrm{so}(3)$ изоморфна $\mathrm{sl}(2)$ *). Если $n = 4$, то схема Дынкина распадается и $\mathrm{so}(4) \sim \mathrm{sl}(2) \oplus \mathrm{sl}(2)$. Следовательно, алгебра $\mathrm{so}(4)$ не является простой. Если $n > 4$, то алгебра $\mathrm{so}(n)$ является простой.

Пример 3. Алгебра $\mathrm{sp}(n)$. Эта алгебра состоит из всех комплексных матриц $n \times n$, кососимметрических относительно билинейной формы (sx, y) с матрицей

$$s = \begin{Vmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma = \begin{Vmatrix} 0 & & & & 1 \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{Vmatrix}, \qquad n = 2\nu.$$

Полагая $n = 2\nu$ и повторяя почти без изменения построения предыдущего примера, получаем схему Дынкина следующего вида:



§ 96. Вещественные формы полупростых комплексных алгебр Ли

Прежде чем заканчивать классификацию, сделаем небольшое отступление. До сих пор мы рассматривали алгебры Ли только над полем комплексных чисел. Однако возможность комплексного продолжения позволяет свести вещественный случай к комплексному. Следовательно, для перечисления всех вещественных полупростых алгебр Ли достаточно найти все вещественные формы полупростых комплексных алгебр Ли.

Одна из таких вещественных форм определяется наиболее просто в базисе Картана — Вейля. Действительно, мы видели в § 94, что при некоторой нормировке

*) См. § 11.