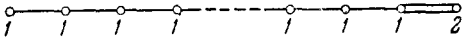
Из рассмотрения этих схем непосредственно очевидно, что алгебра $\mathrm{so}(n)$, $n = 2\nu + 1$, $n = 2\nu$, имеет ранг ν и является полупростой при $n > 2$. Если $n = 3$, то схема Дынкина содержит единственный кружочек; отсюда снова получаем, что алгебра $\mathrm{so}(3)$ изоморфна $\mathrm{sl}(2)$ *). Если $n = 4$, то схема Дынкина распадается и $\mathrm{so}(4) \sim \mathrm{sl}(2) \oplus \mathrm{sl}(2)$. Следовательно, алгебра $\mathrm{so}(4)$ не является простой. Если $n > 4$, то алгебра $\mathrm{so}(n)$ является простой.

Пример 3. Алгебра $\mathrm{sp}(n)$. Эта алгебра состоит из всех комплексных матриц $n \times n$, кососимметрических относительно билинейной формы (sx, y) с матрицей

$$s = \begin{Vmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma = \begin{Vmatrix} 0 & & & & 1 \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{Vmatrix}, \qquad n = 2\nu.$$

Полагая $n = 2\nu$ и повторяя почти без изменения построения предыдущего примера, получаем схему Дынкина следующего вида:



§ 96. Вещественные формы полупростых комплексных алгебр Ли

Прежде чем заканчивать классификацию, сделаем небольшое отступление. До сих пор мы рассматривали алгебры Ли только над полем комплексных чисел. Однако возможность комплексного продолжения позволяет свести вещественный случай к комплексному. Следовательно, для перечисления всех вещественных полупростых алгебр Ли достаточно найти все вещественные формы полупростых комплексных алгебр Ли.

Одна из таких вещественных форм определяется наиболее просто в базисе Картана — Вейля. Действительно, мы видели в § 94, что при некоторой нормировке

*) См. § 11.

этого базиса константы $N_{\alpha\beta}$ становятся вещественными. Кроме того, (α, β) вещественно для двух произвольных корней α, β. Следовательно, в данном базисе все структурные константы вещественны. Пусть L_1 — вещественная линейная оболочка векторов α, e_α, где α пробегает систему всех корней алгебры X. Тогда L_1 является алгеброй Ли над полем вещественных чисел. Поскольку $\dim_R L_1 = \dim_C X$, алгебра L_1 является вещественной формой алгебры X.

Однако в нашем распоряжении имеется еще один универсальный способ выделения вещественной формы. Идея этого способа состоит в аналогии с известным включением $\mathrm{su}(n) \subset \mathrm{sl}(n)$. Условимся нормировать базис Картана — Вейля таким образом, чтобы константы $N_{\alpha\beta}$ подчинялись соотношению $N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha, -\beta}$ (см. § 94). Каждому вектору $x = \sum_{i=1}^{r} c_i\omega_i + \sum_{\alpha} c_\alpha e_\alpha$ поставим в соответствие вектор

$$x^* = \sum_{i=1}^{r} \bar{c}_i\omega_i + \sum_{\alpha} \bar{c}_\alpha e_{-\alpha}.$$

Здесь ω_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, — простые корни алгебры X и черта означает комплексное сопряжение. Операцию $x \to x^*$ назовем *эрмитовым сопряжением* в алгебре X. Как нетрудно проверить, $[x, y]^* = [y^*, x^*]$ и $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$, т. е. эрмитово сопряжение является «антиинволюцией» в алгебре X. Отсюда следует, что множество L_0 всех косоэрмитовых элементов $(x^* = -x)$ из алгебры X является вещественной подалгеброй в алгебре X. Элементы

$$i\omega_k, \quad i(e_\alpha + e_{-\alpha}), \quad e_\alpha - e_{-\alpha},$$

где $i = \sqrt{-1}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, $\alpha > 0$, образуют вещественный базис в алгебре L_0. Отсюда следует, что $\dim_R L_0 = \dim_C X$, т. е. алгебра L_0 является вещественной формой в алгебре X.

Напомним, что $H \perp e_\alpha$, $e_\alpha \perp e_\beta$ при $\alpha \neq -\beta$ и $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. Положим

$$c_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_\alpha + e_{-\alpha}), \quad s_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot i}(e_\alpha - e_{-\alpha})$$

и выберем среди вещественных линейных комбинаций корней ω_k ортогональную систему элементов h_k, $k = 1, 2, \ldots, r$. Тогда элементы ih_k, ic_α, is_α образуют ортогональную систему элементов, и норма каждого из этих элементов равняется -1. Следовательно, форма Киллинга — Картана является отрицательно определенной на L_0 .Отсюда заключаем, что алгебра L_0 является компактной.

В результате мы находим, что имеет место следующая замечательная

Теорема 6. *Любая редуктивная комплексная алгебра Ли содержит компактную вещественную форму.*

Действительно, это верно для случая полупростых алгебр Ли, но также верно и для абелевых алгебр Ли (комплексных векторных пространств).

Следовательно, *при комплексном продолжении компактных алгебр Ли мы получаем все комплексные редуктивные алгебры Ли.*

Мы находим замечательное соответствие между классами компактных и комплексных редуктивных алгебр Ли. Алгебру L_0 мы будем называть *компактной формой Вейля.*

В заключение отметим (уже без доказательства), как можно получить классификацию всех вещественных редуктивных (главным образом простых или полупростых) алгебр Ли. Пусть X — комплексная полупростая алгебра Ли и L_0 — ее компактная форма Вейля. Пусть θ — произвольный автоморфизм этой формы:

$$\theta(\lambda x + \mu y) = \lambda\theta x + \mu\theta y, \quad \theta[x, y] = [\theta x, \theta y].$$

Автоморфизм θ является *инволютивным*, если $\theta^2 = 1$. Заметим, что всякий автоморфизм сохраняет форму Киллинга — Картана: $(\theta x, \theta y) = (x, y)$. Следовательно, θ является ортогональным преобразованием в алгебре L_0. Из условия $\theta^2 = 1$ следует, что θ имеет только собственные значения ± 1. Следовательно, все линейное пространство L_0 может быть представлено в виде прямой ортогональной суммы

$$L_0 = L_0^+ + L_0^-,$$

где $L_0^+ (L_0^-)$ — максимальное подпространство в L_0, на котором $\theta x = x$ $(\theta x = -x)$. Изменяя обозначения, мы положим $K = L_0^+$, $P = iL_0^-$. В результате

$$L_0 = K + iP,$$

где пространство P уже *не содержится* в L_0. Нетрудно видеть, что $[K, K] \subset K$, $[K, P] \subset P$, $[P, P] \subset K$. Следовательно, если положим

$$L = K + P,$$

то получим *подалгебру* L в алгебре X. Из вещественности структурных констант в L_0 следует также (ввиду указанных законов коммутации) вещественность структурных констант в алгебре L. Кроме того, $\dim_R L = \dim_C X$. Следовательно, алгебра L является вещественной формой в алгебре X.

Оказывается, что *таким путем могут быть получены все вещественные формы в алгебре* X *). Разложение $L = K + P$ называется *разложением Картана*. Таким образом, знание L_0 и перечисление всех возможных инволютивных автоморфизмов в L_0 позволяют также перечислить все вещественные формы в X. См. по этому поводу, например, [96]. Более подробное исследование, включающее полную классификацию вещественных форм, содержится в работе Ф. Р. Гантмахера [63].

§ 97. Завершение классификации

Теперь мы вернемся к комплексному случаю. Как мы видели в § 95, задача классификации всех простых комплексных алгебр Ли свелась к задаче описания всех допустимых связных схем Дынкина. Такая задача решается путем несложной комбинаторики, которую за недостатком места мы не будем сейчас воспроизводить. См., например, [128], стр. 152—162 или [19], стр. 144—152. Результатом является

*) Заметим, что вещественная форма может быть простой, даже если X не проста (но полупроста). Примером является вложение $\mathrm{so}(4, R) \subset \mathrm{so}(4, C)$.