где $L_0^+ (L_0^-)$ — максимальное подпространство в L_0, на котором $\theta x = x$ $(\theta x = -x)$. Изменяя обозначения, мы положим $K = L_0^+$, $P = iL_0^-$. В результате

$$L_0 = K + iP,$$

где пространство P уже *не содержится* в L_0. Нетрудно видеть, что $[K, K] \subset K$, $[K, P] \subset P$, $[P, P] \subset K$. Следовательно, если положим

$$L = K + P,$$

то получим *подалгебру* L в алгебре X. Из вещественности структурных констант в L_0 следует также (ввиду указанных законов коммутации) вещественность структурных констант в алгебре L. Кроме того, $\dim_R L = \dim_C X$. Следовательно, алгебра L является вещественной формой в алгебре X.

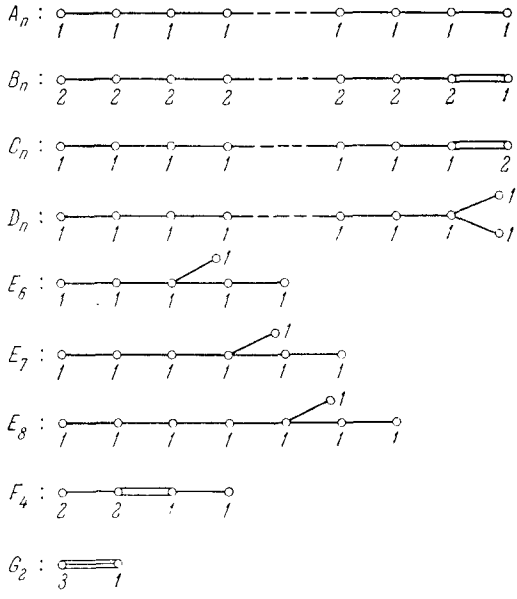
Оказывается, что *таким путем могут быть получены все вещественные формы в алгебре* X *). Разложение $L = K + P$ называется *разложением Картана*. Таким образом, знание L_0 и перечисление всех возможных инволютивных автоморфизмов в L_0 позволяют также перечислить все вещественные формы в X. См. по этому поводу, например, [96]. Более подробное исследование, включающее полную классификацию вещественных форм, содержится в работе Ф. Р. Гантмахера [63].

§ 97. Завершение классификации

Теперь мы вернемся к комплексному случаю. Как мы видели в § 95, задача классификации всех простых комплексных алгебр Ли свелась к задаче описания всех допустимых связных схем Дынкина. Такая задача решается путем несложной комбинаторики, которую за недостатком места мы не будем сейчас воспроизводить. См., например, [128], стр. 152—162 или [19], стр. 144—152. Результатом является

*) Заметим, что вещественная форма может быть простой, даже если X не проста (но полупроста). Примером является вложение $\mathrm{so}(4, R) \subset \mathrm{so}(4, C)$.

Теорема 7. *Всякая простая комплексная алгебра Ли определяется одной из следующих схем Дынкина:*



При этом получаем все неизоморфные простые алгебры, если условимся считать, что $n \geqslant 1$ для серии A_n, $n \geqslant 2$ для серии B_n, $n \geqslant 3$ для серии C_n, $n \geqslant 4$ для серии D_n.

Алгебра A_n есть алгебра Ли группы $\mathrm{SL}(n+1)$. Алгебры B_n, D_n являются алгебрами Ли группы $\mathrm{SO}(m)$ при $m = 2n+1$, $m = 2n$ соответственно. Алгебра C_n есть алгебра Ли группы $\mathrm{Sp}(2n)$. Все эти алгебры носят название *классических*.

Как видим, согласно теореме 7, кроме бесконечных серий $A_n - D_n$ классических простых алгебр Ли, существует еще лишь *пять* отдельных алгебр: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. Эти алгебры носят название *исключительных* или *особых алгебр Картана*.

В книге [19] можно найти эффективное построение алгебр Ли G_2, F_4, E_6 и доказательство существования

E_7, E_8. Мы приведем лишь частичную инфрмацию об этих алгебрах *). Начнем с таблицы корней.

Тип	Корни	Простые корни
A_n	$e_i - e_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n+1$	$e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$
B_n	$\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$	$e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$; e_n
C_n	$\pm 2e_i$, $\pm e_i \pm e_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$	$e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$; $2e_n$
D_n	$\pm e_i \pm e_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$	$e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$; $e_{n-1} + e_n$
E_6	$e_i - e_k$, $i, k = 1, 2, \ldots 6$; $\pm\sqrt{2}\, e_7$; $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6) \pm \frac{e_7}{\sqrt{2}}$	$e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$; $\frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + + e_5 + e_6) + \frac{e_7}{\sqrt{2}}$
E_7	$e_i - e_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, 7$; $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm_6 \pm \pm e_7 \pm e_8)$	$e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$; $\frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
E_8	$\pm e_i \pm e_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, 8$; $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$	$e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$; $\frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + + e_5 + e_6 + e_7 + e_8)$
F_4	$\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_k$, $i, k = 1, 2, 3, 4$; $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$	$e_1 - e_2$; $e_2 - e_3$; e_3; $\frac{1}{2}(-e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$
G_2	$\pm e_1$; $\pm\sqrt{3}\, e_2$; $\pm\frac{1}{2} e_1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} e_2$; $\pm\frac{3}{2} e_1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} e_2$	e_1; $-\frac{3}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2$

Здесь $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис n-мерного евклидова пространства. В случаях E_6, E_7, E_8

*) В качестве подробного справочного руководства по структуре простых алгебр Ли можно указать статью Дж. Титса [131″].

на суммы, заключенные в круглых скобках, накладываются следующие ограничения. В случаях E_6, E_7 такая скобка должна содержать одинаковое количество плюсов и минусов. В случае E_8 количество плюсов (и минусов) должно быть четно. Отсюда путем несложного вычисления получаем число корней; если к этому числу добавить ранг, то получаем, очевидно, размерность данной алгебры. Результатом является следующая таблица:

Тип	A_n	B_n	C_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
Размерность	$n(n+2)$	$n(2n+1)$	$n(2n+1)$	$n(2n-1)$	78	133	248	52	14

В заключение рассмотрим все возможные простые алгебры ранга 2. Таких (неизоморфных) алгебр только 3 — это A_2, B_2, G_2. Вот их системы корней (см. рис. 6):

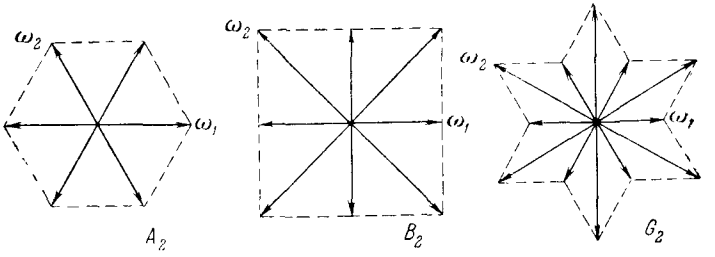


Рис. 6.

Символы ω_1, ω_2 указывают возможный выбор простых корней (относительно некоторой лексикографической упорядоченности). Заметим, что корни алгебры G_2 могут быть также вложены в трехмерное пространство следующим образом: $e_i - e_k$, $i, k = 1, 2, 3$; $\pm(3e_i - e_0)$, где $e_0 = e_1 + e_2 + e_3$. Отсюда, в частности, следует, что алгебра G_2 содержит подалгебру, изоморфную A_2.

Особый интерес представляют алгебры A_2 и G_2. Алгебра A_2 является алгеброй Ли в группе всех автомор-

физмов тела кватернионов (см. § 11). Алгебра G_2 является ([19]) алгеброй Ли в группе всех автоморфизмов чисел Кэли *).

* * *

Существует несколько вариантов определения компактной алгебры Ли; однако все эти определения близки друг другу. Так, в [128] рассматриваются только полупростые алгебры Ли и требуется, чтобы форма Киллинга — Картана была отрицательно определена. В книге [42] требуется, чтобы матрицы присоединенного представления образовывали компактную группу. Наше определение следует работе [38].

Классификация простых алгебр Ли над комплексным полем была начата Киллингом и завершена Э. Картаном [94]. Ряд существенных упрощений был внесен Г. Вейлем [61]. Окончательная классификация корневых систем принадлежит Б. Л. Ван-дер-Вардену [60] и Е. Б. Дынкину [77]. В частности, Е. Б. Дынкин предложил общепринятую в настоящее время систему классификации в терминах простых корней. Теорема о вещественных формах была получена Э. Картаном. Доказательство, изложенное в тексте, принадлежит Г. Вейлю [61].

Теорема 7 является кульминацией картановской теории. Вместе с тем она принадлежит к числу наиболее удивительных открытий в математике. Любопытно, в частности, что наряду с четырьмя бесконечными «правильными» сериями существует всего лишь пять исключительных алгебр Картана. В заключение заметим, что в классе разрешимых (и даже в классе нильпотентных) алгебр Ли до сих пор не получена полная классификация.

---

*) Всякое число Кэли может быть записано в виде формальной матрицы второго порядка $\begin{Vmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{Vmatrix}$, где α, β — комплексные числа и a, b — произвольные векторы из трехмерного комплексного евклидова пространства. Закон умножения определяется формулой

$$\begin{Vmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \gamma & c \\ d & \delta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha\gamma - ad & \alpha c + a\delta + b \times d \\ b\gamma + \beta d + a \times c & -bc + \beta\delta \end{Vmatrix},$$

где pq, $p \times q$ — соответственно скалярное и векторное произведение векторов p, q. Умножение чисел Кэли некоммутативно и неассоциативно, но удовлетворяет следующему «альтернативному» закону: $x^2y = x(xy)$, $yx^2 = (yx)x$.