реме Вейерштрасса существует полином $p(x)$ такой, что

$$|\delta(z)-p(z)|<\delta$$

для $z \in O_x$, O_y. Очевидно, $p(z)>0$ при $z \in O_x$ и $p(z)<0$ при $z \in O_y$. Применяя к $p(z)$ оператор усреднения по группе G, получаем инвариантный полином $\varphi(z)$, положительный на O_x и отрицательный на O_y. Теорема доказана.

Заметим, что инвариантный полином является константой на каждой орбите O_x. В то же время согласно теореме 2 алгебра таких полиномов «разделяет» отдельные орбиты.

Пример. Алгебра полиномов в трехмерном евклидовом пространстве, инвариантных относительно поворотов, содержит единственную образующую $j(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Каждая орбита O_x есть сфера радиуса $|x|=\sqrt{j(x)}$. Отсюда непосредственно видно, что $j(x)$ принимает различные значения на каждой паре различных орбит. Иначе говоря, орбиты O_x, O_y совпадают тогда и только тогда, когда $j(x)=j(y)$.

§ 99. Алгебраические группы

Множество $Z \subset V$ называется *алгебраическим многообразием*, если оно выделяется из V некоторой системой полиномиальных соотношений

$$p_\alpha(x)=0, \qquad \alpha \in A.$$

Здесь A — произвольное множество индексов. Соответствующее множество полиномов p_α называют иногда *определяющей системой* многообразия Z.

Пусть $\mathcal{J}$ — совокупность всех полиномов $p(x)$, обращающихся в нуль на многообразии Z. Тогда, очевидно, $\mathcal{J}$ является идеалом и, следовательно (по теореме Гильберта), порождается некоторым числом образующих $j_1(x), j_2(x), \ldots, j_m(x)$. Следовательно, можем считать, не ограничивая общности, что определяющая система является конечной.

Линейная группа G называется *алгебраической*, если она выделяется из $\mathrm{GL}(n)$ некоторой системой полино-

миальных соотношений

$$p_\alpha(g)=0, \qquad \alpha \in A.$$

Иначе говоря, если $M(n)$ — множество всех матриц $n \times n$, то группа G является пересечением $GL(n)$ с некоторым алгебраическим многообразием в $M(n)$.

Докажем, что имеет место

Теорема 3. *Всякая компактная линейная группа является алгебраической.*

Доказательство. Если рассматривать группу G как группу преобразований $a \to ag$ в линейном пространстве $M(n)$, то G совпадает, очевидно, с орбитой единичной точки $e \in M(n)$. Следовательно, G выделяется из $M(n)$ системой полиномиальных соотношений

$$p(g)-p(e)=0,$$

где $p(a)$ — произвольный инвариантный полином (т. е. такой, что $p(ag)=p(a)$, $g \in G$). Действительно, группа G компактна, и поэтому к ней применима теорема 2: две точки g и e лежат на одной орбите тогда и только тогда, когда $p(g)=p(e)$ для всех инвариантных полиномов $p(a)$. Теорема доказана.

Замечание. Как следует из доказательства теоремы, компактная группа G может быть непосредственно определена как алгебраическое многообразие в $M(n)$ без дополнительного ограничения о невырожденности матрицы g. Впрочем, это ясно также из известного нам включения $G \subset O(n)$.

Поскольку всякая компактная группа Ли изоморфна линейной, то из теоремы 3 получаем также

Следствие. *Всякая компактная группа Ли алгебраична (с точностью до изоморфизма).*

С другой стороны, оказывается, что в классе линейных групп предположение о том, что компактная группа является группой Ли, излишне. В действительности имеет место

Теорема 4. *Всякая алгебраическая группа является группой Ли* *).

---

*) В действительности имеет место также более общая теорема: всякая замкнутая линейная группа является группой Ли ([46]); однако на этом результате мы не будем останавливаться.

Доказательство [15]. Пусть $\mathcal{J}$ — идеал, составленный из полиномов, равных нулю на G, и $j_1(x)$, $j_2(x)$, ..., $j_m(x)$ — система образующих в этом идеале. Рассмотрим матрицу $F(x)$, составленную из частных производных $\partial j_k(x)/\partial x_{ij}$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Если r — ранг этой матрицы в точке $x = e$, то мы условимся считать (не ограничивая общности), что первые r строк этой матрицы содержат минор Δ, отличный от нуля в точке e. Тогда $\Delta \neq 0$ также в некоторой окрестности точки e. Систему уравнений $j_k(x) = \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots, r$, можно разрешить в некоторой окрестности точки e относительно тех переменных x_{ij}, индексы которых содержатся в миноре Δ. При этом получаемые функции выражаются аналитически через ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, и остальные $d = n^2 - r$ координат x_{ij}. Следовательно, мы получаем локальную систему координат

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r; u_1, u_2, \ldots, u_d)$$

в некоторой окрестности точки e, где $u_1, u_2, \ldots, u_d$ — дополнительные координаты, в качестве которых можно, например, взять координаты x_{ij}, индексы которых не содержатся в миноре Δ. Полагая $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_r = 0$, получаем в $M(n)$ некоторое алгебраическое многообразие $\mathfrak{G}$, которое, очевидно, содержит группу G. Каждая точка этого многообразия, достаточно близкая к e, допускает аналитическую параметризацию

$$x = x(u_1, u_2, \ldots, u_d).$$

При этом, очевидно, если $x, y, xy \in \mathfrak{G}$, то параметры матрицы xy аналитически выражаются через параметры x и y.

Покажем, что в действительности оба многообразия G и $\mathfrak{G}$ имеют общую окрестность точки e. Иначе говоря, существует окрестность $U \subset M(n)$ такая, что $U \cap G = U \cap \mathfrak{G}$. Отсюда будет следовать, что G — группа Ли.

Заметим вначале, что при каждом $g \in G$ множество $j_1(xg)$, $j_2(xg)$, ..., $j_m(xg)$ также является системой образующих в идеале $\mathcal{J}$. Следовательно,

$$j_k(xg) = \sum_{l=1}^{m} j_l(x)\, a_{lk}(x),$$

где $a_{lk}(x)$ — некоторые полиномы от матрицы x. Поскольку $j_l(x) = 0$ на группе G, то мы имеем также

$$\frac{\partial j_k(xg)}{\partial x_{ij}} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial j_l(x)}{\partial x_{ij}}\, a_{lk}(x)$$

для каждой точки $x \in G$. Отсюда заключаем, что ранг $F(xg)$ не превосходит ранга $F(x)$. Заменяя x на xg^{-1}, заключаем, что ранг $F(x)$ постоянен на всей группе G. Следовательно, если Δ — построенный выше минор, то всякий минор, окаймляющий Δ, обращается в нуль тождественно на всей группе G. Следовательно, он содержит-

ся в идеале $\mathcal{J}$. Отсюда следует, что всякая производная $\frac{\partial j_k}{\partial x_{ij}}$ может быть выражена через первые r таких производных по формуле

$$\frac{\partial j_k(x)}{\partial x_{ij}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial j_l(x)}{\partial x_{ij}} b_{lk}(x) + \ldots,$$

где $b_{lk}(x)$ — полиномы от x и многоточие означает слагаемое, принадлежащее идеалу $\mathcal{J}$. Далее, пусть $x(t)$ — кривая в многообразии $\mathfrak{G}$, проходящая через точку e при $t = 0$. Поскольку вдоль этой кривой переменные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ постоянны, то $\frac{dj_l}{dt} = 0$, $l = 1, 2, \ldots$ $\ldots, r$, и мы имеем

$$\frac{dj_k(x)}{dt} = \frac{1}{\Delta} \sum_{l=1}^{r} \frac{dj_l(x)}{dt} b_{lk}(x) + \ldots = \ldots,$$

где многоточие означает элемент из $\mathcal{J}$. Следовательно,

$$\frac{dj_k(x)}{dt} = \sum_{l=1}^{m} j_l(x) c_{lk}(x),$$

ибо полиномы $j_l(x)$, $l = 1, 2, \ldots, m$, являются образующими в $\mathcal{J}$. При этом $j_k(0) = 0$, ибо точка e содержится в группе G. Согласно теореме единственности заключаем из полученного уравнения, что $j_k(x) \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, в некоторой окрестности вида $\mathfrak{G} \cap U$. Следовательно, $\mathfrak{G} \cap U \subset G$, т. е. $\mathfrak{G} \cap U = G \cap U$. Теорема доказана.

Покажем теперь, что свойство алгебраичности сохраняется при переходе от компактной группы G к ее (правильной) комплексной оболочке.

Теорема 5. *Пусть G — компактная линейная группа и $\tilde{G}$ — ее правильная*) комплексная оболочка. Тогда $\tilde{G}$ является алгебраической группой Ли над полем комплексных чисел.*

Доказательство. Условимся считать, что G, $\tilde{G}$ действуют в одном и том же комплексном пространстве V (если с самого начала это было не так, то G выделяется условием вещественности всех ее матриц в

*) См. определение в § 41. Существование комплексной оболочки здесь предполагается; сам факт существования будет доказан далее, в § 106.

некотором базисе пространства V). Согласно принципу аналитического продолжения группы G, $\tilde{G}$ обладают одинаковым запасом инвариантов в классе (аналитических) полиномов. В то же время при переходе от G к $\tilde{G}$ число орбит может только уменьшиться. Следовательно, для $\tilde{G}$ имеет место аналог теоремы 2; но тогда и доказательство теоремы 3 переносится без изменения. Теорема доказана.

В заключение отметим без доказательства следующий критерий связности алгебраической группы G над полем комплексных чисел ([46], т. 2, стр. 239): *группа G является связной тогда и только тогда, когда из равенства $p(x)q(x)=0$ (для любых полиномов p, q) на группе G следует, что либо $p(x)=0$, либо $q(x)=0$ на группе G.*

Упражнения

1. Докажите, что группа вещественных диагональных матриц с диагональными элементами λ, λ^m, где $\lambda>0$ и m — фиксированное положительное число, не является алгебраической. Найдите минимальную алгебраическую группу, в которой эта группа содержится (отдельно при m рациональном и m иррациональном).

2. Пусть $Z=Z(n)$ — группа всех (верхних) треугольных матриц $n\times n$ с единицами на главной диагонали. Показать, что всякая замкнутая связная подгруппа в группе Z является алгебраической. (Указание: использовать экспоненциальное отображение; проверить попутно, что указанная подгруппа является группой Ли.)

§ 100. Разложение Гаусса

При изучении структуры полупростой комплексной алгебры Ли была обнаружена замечательная симметрия, позволяющая выделить в этой алгебре, наряду с картановской подалгеброй, также аналог «понижающих» и «повышающих» операторов, т. е. нильпотентные подалгебры X_-, X_+ с определенными соотношениями коммутации. Выясним, как отражается эта информация на структуре соответствующей группы Ли.

Вместо полупростой комплексной алгебры Ли мы можем сразу рассматривать алгебру редуктивную, т. е. произвольную комплексную оболочку компактной алгебры Ли. Пусть X — редуктивная комплексная алгебра, X' — ее полупростая компонента и $\mathfrak{Z}$ — центр. Выделяя в