всех верхних треугольных блок-матриц с единичными диагональными блоками. Тогда имеет место (***) для группы $G = \mathrm{GL}(n)$, и группа G^0 является треугольным усечением в $\mathrm{GL}(n)$.

Замечание. Если G — присоединенная группа полупростой комплексной алгебры X, то подгруппа G^0 в (***) может быть охарактеризована как совокупность всех преобразований из G, оставляющих неподвижным ортогональное дополнение в картановской алгебре H до линейной оболочки H^0 системы Π^0. (Соответственно алгебра X^0 есть централизатор $H \ominus H^0$.)

Упражнение

Пусть G — редуктивная связная комплексная группа Ли и θ^ω — подалгебра в алгебре Ли X группы G, натянутая на векторы $e_{-\omega}$, h, e_ω, где h пробегает картановскую подалгебру X_0. Показать, что в группе G существует замкнутая подгруппа Θ^ω с алгеброй Ли θ^ω и $\Theta^\omega_{\mathrm{reg}} = N^\omega_- D N^\omega_+$, где N^ω_-, N^ω_+ — однопараметрические подгруппы с касательными векторами $e_{-\omega}$, e_ω. (Указание: рассмотреть вначале тот случай, когда группа G является присоединенной группой алгебры X, и воспользоваться приведенным выше замечанием для определения Θ^ω.)

§ 101. Разложение Ивасавы

В этом параграфе мы опишем еще одно замечательное разложение, которое является аналогом разложения матрицы в произведение треугольного и унитарного сомножителей. Мы могли бы, как и в предыдущем параграфе, рассматривать сразу общий случай редуктивной связной группы Ли. Однако предпочтем отдельно исследовать тот случай, когда группа G полупроста.

Теорема 7. *Пусть G — произвольная связная полупростая комплексная группа Ли. Тогда эта группа допускает однозначное разложение вида*

$$G = T\mathfrak{U},$$

где $\mathfrak{U}$ — максимальная компактная подгруппа в группе G и T — максимальная односвязная разрешимая подгруппа в G.

Доказательство. Рассмотрим вначале тот случай, когда группа G имеет тривиальный центр. Если X — алгебра Ли группы G, то G в этом случае изоморфна присоединенной группе алгебры X, т. е. связной компоненте единицы в группе всех автоморфизмов алгебры X. Согласно теореме 6 *) группа G допускает разложение Гаусса:

$$a = \zeta\varepsilon z, \qquad a \in C_{\text{reg}}.$$

Мы условимся отождествлять группу G с присоединенной линейной группой, действующей в пространстве X. Рассмотрим в X эрмитово сопряжение, введенное в § 96, и определим компактную форму Вейля $K \subset X$, как совокупность всех косоэрмитовых матриц $(x^* = -x)$. Заметим, что если a — произвольная положительно определенная матрица, то все ее диагональные главные миноры положительны и, следовательно, a допускает разложение Гаусса. Если матрица a эрмитова, то мы имеем для нее

$$z^*\delta^*\zeta^* = \zeta\,\delta z.$$

Поскольку эрмитово сопряжение меняет местами Z_-, Z_+ и поскольку разложение Гаусса единственно, мы находим отсюда $z = \zeta^*$, $\delta = \delta^*$. В частности, δ является диагональной положительно определенной матрицей. Следовательно, все ее собственные значения положительны. Множество всех диагональных положительно определенных матриц из G мы обозначим E. Докажем, что E является односвязной абелевой группой с алгеброй Ли H_0, где H_0 — вещественная оболочка всех корней $\alpha \in H$.

Заметим вначале, что матрица $\varepsilon \in E$ сохраняет соотношение коммутации $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$. Если λ и μ — собственные значения ε на элементах h, e_α соответственно, то мы находим отсюда $\lambda\mu = \mu$, т. е. $\lambda = 1$ **). Следовательно, алгебра H неподвижна относительно преобразования ε. Далее, пусть ε_α — собственное значение преоб-

*) Здесь мы используем лишь первую часть теоремы 6 (без связности группы G). Более того, нам нужен лишь тот частный случай, с рассмотрения которого мы начали доказательство теоремы 6.

**) Напомним, что ε рассматривается как автоморфизм алгебры X; отсюда, в частности, следует, что $\mu \neq 0$.

разования ε на векторе e_α. Тогда, используя соотношение коммутации $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$, находим $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = \varepsilon_{\alpha+\beta}$. Следовательно, матрица ε вполне определяется своими собственными значениями ε_ω, где ω — произвольный простой корень. Положим $\mu_\omega = \ln \varepsilon_\omega$; поскольку простые корни образуют базис в H_0, то существует вектор $h \in H_0$, для которого $\mu_\omega = (h, \omega)$. Следовательно, $\varepsilon_\omega = e^{(h, \omega)}$ и $\varepsilon_\alpha = e^{(h, \alpha)}$ для всех корней α. Следовательно, $\varepsilon = \exp h$, и наше утверждение доказано.

Рассмотрим теперь произвольную матрицу $g \in G$ и положим $a = gg^*$; тогда получаем эрмитову положительно определенную матрицу a. Согласно сказанному выше $a = \zeta\delta\zeta^*$, где $\delta \in E$, $\zeta \in Z_-$. Далее, положим

$$u = \varepsilon^{-1}\zeta^{-1}g,$$

где $\varepsilon = \sqrt{\delta}$. Поскольку матрица δ положительно определена, то радикал существует и ε также является элементом подгруппы E. Имеем

$$uu^* = \varepsilon^{-1}\zeta^{-1}gg^*\zeta^{*-1}\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1}\delta\varepsilon^{-1} = e.$$

Следовательно, матрица u является унитарной. В результате мы имеем

$$g = \zeta\varepsilon u.$$

Искомое разложение получено. Положим $T = Z_-E$ и обозначим символом $\mathfrak{U}$ пересечение группы G с унитарной группой $\mathrm{U}(n)$; тогда имеем

$$G = T\mathfrak{U},$$

причем индивидуальное разложение $g = tu$, $t \in T$ и $u \in \mathfrak{U}$, однозначно. Таким образом, в нашем случае теорема доказана.

Заметим, что односвязная группа T не содержит ни одной унитарной матрицы, кроме единицы. Следовательно, $\mathfrak{U}$ является максимальной компактной подгруппой в группе G*).

Перейдем к рассмотрению общего случая. Утверждение теоремы доказано для группы $G' = \pi(G)$, где π означает присоединенное представление. Следовательно,

*) Детали доказательства предоставляются читателю.

$G' = T'\mathfrak{U}'$, где T' — односвязная разрешимая подгруппа и $\mathfrak{U}'$ максимальная компактная подгруппа в G'. Следовательно, также

$$G = T \cdot \pi^{-1}(\mathfrak{U}'),$$

где T — связная компонента единицы в $\pi^{-1}(T')$. Действительно, из дискретности центра C (ядра представления π) следует $\pi(T) = T'$ (в противном случае T' несвязна); далее, при $\pi(g) = t'u'$, $t' \in T'$, $u' \in \mathfrak{U}'$, выбираем $t \in T$ из условия $\pi(t) = t'$ и находим, что $t^{-1}g = u \in \pi^{-1}(\mathfrak{U}')$. Поскольку связная группа T накрывает односвязную группу T', то T гомеоморфно T'. В частности, $T \cap C = \{e\}$, разложение $g = tu$, $t \in T$, $u \in \mathfrak{U}$, однозначно и $t = t(g)$ аналитически зависит от g. Следовательно, также $u = u(g)$ аналитически зависит от g. Отсюда имеем

$$G = T\mathfrak{U},$$

где $\mathfrak{U}$ — связная компонента единицы в $\pi^{-1}(\mathfrak{U}')$ (действительно, $u(g)$ непрерывно стягивается к e). В частности, $C \subset \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}/C$. Отсюда следует (§ 103) компактность $\mathfrak{U}$ и конечность C. Наконец, поскольку T не содержит компактных подгрупп (кроме $\{e\}$), заключаем, что $\mathfrak{U}$ — максимальная компактная подгруппа в G. Теорема доказана.

Следствие 1. *Всякая редуктивная связная комплексная группа G допускает разложение вида $T\mathfrak{U}$, где T — разрешимая подгруппа и $\mathfrak{U}$ — максимальная компактная подгруппа в группе G.*

Действительно, $G = G'N$, где G' — полупростая компонента и N — связная компонента центра группы G.

Следствие 2. *Пусть X — полупростая комплексная алгебра Ли, L_- — разрешимая вещественная подалгебра, натянутая на векторы e_α, ie_α, h_0, $\alpha < 0$, $h_0 \in H_0$, и L_0 — компактная форма Вейля. Тогда мы имеем*

$$X = L_- + L_0$$

(*прямая сумма*). *Аналитическая подгруппа T, порожденная подалгеброй L_-, замкнута и односвязна. Аналитическая подгруппа $\mathfrak{U}$, порожденная подалгеброй L_0, замкнута и является максимальной компактной подгруппой в G.*

Из прямого разложения $X = L_- + L_0$ следует локальная однозначность отображения $(t, u) \to tu$ группы $T \times \mathfrak{U}$ на группу G в каждой точке $g \in G$. Отсюда следует, что сответствие между $T \times \mathfrak{U}$ и группой G является *аналитическим гомеоморфизмом.* Отсюда, в частности, получаем

Следствие 3. *Полупростая связная комплексная группа Ли как топологическое пространство изоморфна произведению $T \times \mathfrak{U}$, где T — евклидово пространство и $\mathfrak{U}$ — компактная связная полупростая комплексная группа Ли.*

Согласно следствию 3 топологическая структура группы G сводится, по существу, к топологической структуре группы $\mathfrak{U}$. В частности, G и $\mathfrak{U}$ могут быть односвязными только одновременно.

Разложение теоремы 7 носит название *разложения Ивасавы.* Заметим, что группа G в этом разложении выступает фактически как вещественная полупростая группа Ли (с удвоенным числом параметров). В действительности теорема 7 легко обобщается ([85], [92], [128]) на произвольную полупростую вещественную связную группу Ли.

§ 102. Максимальные торы

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства торов (коммутативных связных подгрупп) в произвольной компактной связной группе Ли. Докажем вначале, что имеет место

Теорема 8. *Всякий элемент компактной связной группы Ли содержится в некоторой однопараметрической подгруппе.*

Следствие. *Если G — компактная связная группа Ли, то экспоненциальное отображение накрывает всю группу G.*

Доказательство. Ради сокращения текста воспользуемся некоторыми результатами из теории римановых пространств. Рассмотрим группу G как замкнутую подгруппу в $\mathrm{U}(n)$ и введем в линейное пространство матриц $n \times n$ метрику

$$ds^2 = \operatorname{sp} dx \cdot dx^*,$$