Из прямого разложения $X = L_- + L_0$ следует локальная однозначность отображения $(t, u) \to tu$ группы $T \times \mathfrak{U}$ на группу G в каждой точке $g \in G$. Отсюда следует, что сответствие между $T \times \mathfrak{U}$ и группой G является *аналитическим гомеоморфизмом.* Отсюда, в частности, получаем

Следствие 3. *Полупростая связная комплексная группа Ли как топологическое пространство изоморфна произведению $T \times \mathfrak{U}$, где T — евклидово пространство и $\mathfrak{U}$ — компактная связная полупростая комплексная группа Ли.*

Согласно следствию 3 топологическая структура группы G сводится, по существу, к топологической структуре группы $\mathfrak{U}$. В частности, G и $\mathfrak{U}$ могут быть односвязными только одновременно.

Разложение теоремы 7 носит название *разложения Ивасавы.* Заметим, что группа G в этом разложении выступает фактически как вещественная полупростая группа Ли (с удвоенным числом параметров). В действительности теорема 7 легко обобщается ([85], [92], [128]) на произвольную полупростую вещественную связную группу Ли.

§ 102. Максимальные торы

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства торов (коммутативных связных подгрупп) в произвольной компактной связной группе Ли. Докажем вначале, что имеет место

Теорема 8. *Всякий элемент компактной связной группы Ли содержится в некоторой однопараметрической подгруппе.*

Следствие. *Если G — компактная связная группа Ли, то экспоненциальное отображение накрывает всю группу G.*

Доказательство. Ради сокращения текста воспользуемся некоторыми результатами из теории римановых пространств. Рассмотрим группу G как замкнутую подгруппу в $\mathrm{U}(n)$ и введем в линейное пространство матриц $n \times n$ метрику

$$ds^2 = \operatorname{sp} dx \cdot dx^*,$$

где dx означает дифференциал переменной матрицы $x \in M(n)$ и звездочка означает эрмитово сопряжение. Если $u \in U(n)$, то мы имеем

$$\operatorname{sp}(dx \cdot u)(dx \cdot u)^* = \operatorname{sp} dx \cdot dx^*,$$

и то же верно при умножении dx слева на u. Следовательно, метрика ds^2 является двусторонне инвариантной на $U(n)$ и, в частности, на группе G. Поскольку группа G является вещественным дифференцируемым (и даже аналитическим) многообразием в $M(n)$, то G является римановым пространством. Функция

$$\rho(a, b) = \inf s(L),$$

где $s(L)$ — длина спрямляемой линии L и inf берется по всем таким линиям, соединяющим a, b, определяет метрику в пространстве G. G является относительно этой метрики *компактным метрическим пространством.*

Как известно*), в компактном римановом пространстве через любые две точки можно провести хотя бы одну геодезическую. Если $\rho(a, b) < \delta$ при достаточно малом δ, то геодезическая, проходящая через a, b, определяется однозначно. Рассмотрим теперь преобразование

$$\tilde{a} = a_0 a^{-1} a_0$$

с фиксированной точкой a_0. Согласно свойству двусторонней инвариантности и равенству $da^{-1} = -a^{-1} da\, a^{-1}$ переход от a к $\tilde{a}$ сохраняет метрику. В частности, точка a_0 остается неподвижной, откуда $\rho(\tilde{a}, a_0) = \rho(a_0, a)$. Преобразование $a \to \tilde{a}$ называется *симметрией относительно точки* a_0.

Если a достаточно близко к a_0, то все три точки a, a_0, $\tilde{a}$ лежат на одной геодезической.

Приступим теперь к доказательству теоремы. Фиксируем точку $g \neq e$ и проведем геодезическую γ, соединяющую g и e. Покажем вначале, что существует однопараметрическая подгруппа $g(t)$, содержащая все точки отрезка γ, достаточно близкие к e.

Пусть $g_1 \in \gamma$ настолько близко к e, что через g_1 проходит однопараметрическая подгруппа $g(t)$, и γ является

*) См., например, [29], стр. 118.

единственной геодезической, соединяющей g_1 и e. Если уже доказано, что пара точек $p = g(t_1)$, $q = g(t_2)$ содержится в γ, то мы рассматриваем точку $r = g\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$ и замечаем, что имеет место формула

$$rg(t)^{-1}r = g(t_1+t_2-t).$$

Полагая, в частности, $t = t_1, t_2$, заключаем, что симметрия относительно r переставляет p и q. Следовательно, r лежит на геодезической, проходящей через p и q. Следовательно, $r \in \gamma$. Нормируем теперь параметр t таким образом, чтобы $e = g(0)$, $g_1 = g(1)$. Применяя индуктивно предыдущее рассуждение, заключаем, что γ содержит все точки $g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где t двоично-рационально. Ввиду непрерывности γ*) γ содержит также весь отрезок $g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Наше утверждение доказано.

Заметим, что точка g_1^{-1} симметрична точке g_1 относительно e. Продолжая кривую $g(t)$ и геодезическую γ на отрицательные значения t, заключаем, что γ содержит также отрезок вида $g(t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Далее, рассмотрим множество всех точек, принадлежащих одновременно γ и $g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где T — достаточно большое число**). Поскольку это множество замкнуто (как пересечение двух замкнутых множеств), то его связная компонента γ^*, содержащая точку e, имеет вид отрезка $g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, при некотором t_0. Положим $g_0 = g(t_0)$. Если $g_0 = g$, то теорема доказана. Если $g_0 \neq g$, то мы осуществляем левую трансляцию g_0^{-1} во всей группе G. Поскольку всякая трансляция переводит геодезическую в геодезическую, то, в частности, кривая $g_0^{-1}\gamma$ является геодезической, проходящей через точку e. Выбирая на этой кривой точку h_1, достаточно близкую к e, заключаем, как и выше, что $g_0^{-1}\gamma$ содержит отрезок некоторой однопараметрической подгруппы $h(\tau)$, $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$. Поэтому γ содержит отрезок кривой $g_0h(\tau)$,

---

*) Согласно теории римановых пространств геодезические не только непрерывны, но и дифференцируемы на G.

**) Достаточно выбрать T настолько большим, чтобы расстояние по кривой $g(t)$ от точки e до точки $g(T)$ было больше (или равно) расстояния по γ от точки e до точки g.

$-1 \leqslant \tau \leqslant 1$. Следовательно,

$$g(t) = g_0 h(\tau)$$

при достаточно малых τ, $-1 \leqslant \tau \leqslant 0$, и при некоторых значениях t, $t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_0$. В частности, $g_0 = g(t_0)$, откуда заключаем, что $h(\tau) = g(t - t_0)$. Следовательно, $h(\tau)$ совпадает с $g(t)$ с точностью до замены (аддитивного) параметра. Поэтому g_0 не является крайней точкой множества γ^*, что противоречит определению g_0. В результате заключаем, что $g_0 = g$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 8 мы получаем также замечательное соответствие между геодезическими и однопараметрическими подгруппами в группе G. *Всякая однопараметрическая подгруппа есть геодезическая, проходящая через точку e. Всякая геодезическая получается (левой или правой) трансляцией из однопараметрической подгруппы в группе G.*

Замечание 2. Теорема 8 может быть доказана непосредственно, без использования свойств симметрии, если показать, что длина кривой, соединяющей точки e и γ, минимизируется только на однопараметрической подгруппе. См., например, [15].

Рассмотрим теперь произвольные торы в группе G. Напомним, что тором называется всякая связная коммутативная компактная группа Ли. Тор Γ в группе G называется максимальным, если он не содержится ни в каком другом торе из G (отличном от Γ). Докажем, что имеет место

Теорема 9. *Пусть G — компактная связная группа Ли и Γ — ее максимальный тор. Тогда для любого элемента $g \in G$ найдется элемент $u \in G$, для которого $u^{-1}gu \in \Gamma$.*

Доказательство. Согласно теореме 8 $g = \exp x$, $x \in X$, где X — алгебра Ли группы G. Рассмотрим произвольный элемент $u \in G$ и положим *) $\varphi(u) = (x, uyu^{-1})$, где y — фиксированный элемент из X и скобка означает скалярное произведение в X, относительно которого операторы $D_a x = [a, x]$ кососимметричны. Положим

*) Мы рассматриваем G как линейную группу, что позволяет умножать элементы $g \in G$ на элементы $x \in X$.

$u = u_0 \exp tz$ и заметим, что

$$\varphi(u) = (x_0, \exp tz \cdot y \cdot \exp(-tz)),$$

где $x_0 = u_0^{-1} x u_0$. Действительно, операторы $\pi(u)x = uxu^{-1}$ ортогональны относительно формы (x, y), и оператор $\pi(u_0)$ можно перебросить налево, заменяя u_0 на u_0^{-1}. Далее, имеем

$$\left.\frac{d\varphi(u)}{dt}\right|_{t=0} = (x_0, [z, y]) = ([y, x_0], z).$$

Заметим теперь, что функция $\varphi(u)$ является дифференцируемой (и даже аналитической) на G. Поскольку группа G компактна, то $\varphi(u)$, согласно теореме Вейерштрасса, достигает максимума на G. Если u_0 — точка максимума, то $d\varphi(u) = 0$ при $u = u_0$. Следовательно, в этом случае $([y, x_0], z) = 0$ тождественно по $z \in X$. Следовательно,

$$[y, x_0] = 0.$$

Пока еще в нашем распоряжении имеется произвол в выборе элемента $y \in X$. Выберем y таким образом, чтобы однопараметрическая подгруппа $\exp ty = 0$ была всюду плотной в торе Γ. Тогда мы имеем

$$\gamma^{-1} x_0 \gamma = x_0$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Следовательно, также $[y, x_0] = 0$ для всякого $y \in H$, где H — алгебра Ли тора Γ. Поскольку Γ — максимальный тор, алгебра H является максимальной коммутативной подалгеброй в X. Следовательно, $x_0 \in H$. Следовательно, также $g_0 \in \Gamma$, где $g_0 = \exp x_0 = u_0^{-1} g u_0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любые два максимальных тора сопряжены в группе G.*

Действительно, пусть Γ_0 — максимальный тор и γ_0 — его иррациональная образующая *), т. е. элемент, степени которого образуют всюду плотное множество в Γ_0. Тогда элемент $u^{-1}\gamma_0 u$ является образующей в максимальном торе $u^{-1}\Gamma_0 u$. Поскольку для всякого максимального

*) См. § 40 (стр. 171).

тора Γ найдется такой элемент u, что $u^{-1}\gamma_0 u \in \Gamma$, то $u^{-1}\Gamma_0 u = \Gamma$, и любой максимальный тор сопряжен Γ_0.

Следствие 2. *Любые две максимальные коммутативные подалгебры в компактной алгебре X сопряжены относительно внутреннего автоморфизма.*

Доказательство вытекает из очевидного соответствия между максимальными торами и максимальными коммутативными подалгебрами в X. Всякая такая подалгебра в компактной алгебре X называется *подалгеброй Картана.* Соответственно всякая максимальная коммутативная (не обязательно связная) подгруппа в компактной связной группе G называется *подгруппой Картана.*

Следствие 3. *Всякая подгруппа Картана является связной и определяется однозначно с точностью до сопряженности.*

Действительно, пусть Γ — подгруппа Картана и Γ_0 — ее связная компонента единицы. Если $\gamma \in \Gamma$, то $\gamma^n \in \Gamma_0$ при некотором натуральном n (поскольку группа Γ/Γ_0 конечна). Если n — минимальное из таких чисел, то элементы $\gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^n$ содержатся в различных связных листах группы Γ. Рассмотрим элемент

$$\varepsilon_0 = \exp \frac{1}{n} z_0,$$

где z_0 определяется тем условием, что $\gamma^n \exp z_0$ является иррациональной образующей в Γ_0. Тогда нетрудно видеть, что $\gamma\varepsilon_0$ является образующей в группе Γ_1, порожденной элементами Γ_0 и γ. Если $\tilde{\Gamma}$ — максимальный тор, содержащий $\gamma\varepsilon_0$, то $\Gamma_1 \subset \tilde{\Gamma}$. Следовательно, $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \tilde{\Gamma}$, откуда $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \tilde{\Gamma}$ ввиду максимальности тора Γ_0. Следовательно, $\gamma \in \Gamma_0$ и $\Gamma_0 = \Gamma$.

Замечание 3. Из связности картановской подгруппы в компактной подгруппе $\mathfrak{U}$ и разложения Ивасавы $G = T\mathfrak{U}$ мы получаем также связность картановской подгруппы D в произвольной связной полупростой (и также редуктивной) группе G. Действительно, $D = E\Gamma$, где E — максимальная односвязная подгруппа в T с алгеброй Ли H_0 (см. § 101) и Γ — максимальный тор в подгруппе $\mathfrak{U}$. Следовательно, мы получаем иное доказательство заключительной части теоремы 6.

Заметим также, что всякая подгруппа Картана содержит центр группы G; следовательно, *центр содержится в любом максимальном торе.*

§ 103. Фундаментальная группа и центр

В этом параграфе мы займемся вопросом об описании класса $\omega(X)$ всех локально изоморфных групп Ли с данной алгеброй Ли X. Алгебра X предполагается компактной. Рассмотрим вначале тот случай, когда алгебра X полупроста.

Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная группа Ли с алгеброй Ли X. Далее, пусть $\mathfrak{G}_0$ — присоединенная группа, т. е. связная компонента единицы в группе всех автоморфизмов алгебры X. Группа $\mathfrak{G}_0$ компактна. Поскольку алгебра X предполагается полупростой, то группа $\mathfrak{G}_0$ имеет X своей алгеброй Ли, т. е. $\mathfrak{G}_0 \in \omega(X)$. Группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_0$ являются «максимальной» и «минимальной» группами в классе $\omega(X)$. Действительно, если $\mathfrak{Z}$ — центр группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}_0$ изоморфна $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 10. *Пусть X — полупростая компактная алгебра Ли. Тогда односвязная группа $\mathfrak{G} \subset \omega(X)$ компактна и центр этой группы конечен.*

Следствие 1. *Существует лишь конечное число локально изоморфных связных групп Ли с полупростой компактной алгеброй Ли X.*

Следствие 2. *Универсальная накрывающая полупростой компактной группы Ли компактна.*

Следствие 3. *Центр полупростой компактной группы Ли конечен.*

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, сделаем следующее замечание. В комплексной оболочке $X + iX$ выберем базис Картана — Вейля α, e_α, где α — произвольный корень. Напомним, что алгебра X натянута на векторы $i\omega$, ic_α, is_α, где

$$c_\alpha = \frac{1}{2}(e_\alpha + e_{-\alpha}), \qquad s_\alpha = \frac{1}{2i}(e_\alpha - e_{-\alpha}), \qquad \alpha > 0$$

и ω — произвольный простой корень. Линейную оболочку векторов $i\omega$ обозначим X_0. X_0 есть максимальная