Теорема 11. *Всякая компактная связная группа Ли может быть записана следующим образом:*

$$G \approx (\mathfrak{G}' \times A)/C,$$

где $\mathfrak{G}'$ — односвязная связная полупростая компактная группа Ли, A — коммутативная связная компактная группа Ли и C — конечный центральный делитель такой, что $A \cap C = \{e\}$.

Доказательство. Пусть X — алгебра Ли группы G, $X = X' + Y$, где $X' = [X, X]$ и Y — центр алгебры X. Пусть $\mathfrak{G}'$ — односвязная компактная группа Ли с алгеброй Ли X' и F есть m-мерное векторное пространство, где $m = \dim Y$. Группа $\mathfrak{G}' \times F$ является односвязной группой с алгеброй Ли X. Всякая группа $G \in \omega(X)$ может быть записана в виде

$$G = \varphi(\mathfrak{G}' \times F),$$

где φ — гомоморфизм, ядром которого является дискретный центральный делитель N. Для каждого $g \in G$ мы имеем

$$g = \varphi(g', f) = \varphi(g', e)\varphi(e, f),$$

где g' пробегает $\mathfrak{G}'$ и f пробегает F. Следовательно, также $g = \psi(g', a)$, где $a = \varphi(e, f)$ и ψ — гомоморфизм, определяемый формулой $\psi(g', a) = \varphi(g', e)a$. Множество A элементов вида $a = \varphi(e, f)$ изоморфно $F/F \cap N$ и потому является связной подгруппой в G. В результате

$$G = \psi(\mathfrak{G}' \times A).$$

Если G компактна, то подгруппа A также должна быть компактной. Кроме того, элемент $\psi(e, a) = a$ обращается в единицу только при $a = e$. Следовательно, если C — ядро гомоморфизма ψ, то $C \cap A = \{e\}$. Теорема доказана.

§ 104. Теорема о линейности полупростой комплексной группы Ли

Исходя из принципа аналитического продолжения, естественно предположить, что для полупростых комплексных групп Ли сохраняется свойство линейности, справедливое для компактных групп Ли. Покажем, что

это действительно так. Отметим вначале следующее свойство:

1° *Полупростая комплексная связная группа G является правильной комплексной оболочкой своей максимальной компактной подгруппы* $\mathfrak{U}$.

Это утверждение вытекает из теоремы 7. Действительно, алгеброй Ли группы $\mathfrak{U}$ является компактная форма Вейля в алгебре Ли группы G. Далее, имеем:

2° *Центр группы G конечен и содержится в подгруппе* $\mathfrak{U}$.

Действительно, мы видели при доказательстве теоремы 7, что центр содержится в подгруппе $\mathfrak{U}$. Следовательно, этот центр конечен. Теперь докажем, что имеет место

Теорема 12. *Всякая полупростая связная комплексная группа Ли допускает точное аналитическое линейное представление.*

Доказательство. Если G односвязна, то всякое линейное представление группы $\mathfrak{U}$ продолжается аналитически (§ 41) до однозначного представления группы G. Следовательно, в данном случае теорема доказана. Далее, пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная группа и $G \approx \mathfrak{G}/N$, где N — конечный центральный делитель в $\mathfrak{G}$. Тогда максимальной компактной подгруппой в группе G является $\mathfrak{U}/N$ (напомним, что N содержится в $\mathfrak{U}$). Пусть ρ — точное линейное представление $\mathfrak{U}/N$. Мы можем рассматривать это представление как представление группы $\mathfrak{U}$, ядром которого является N. Продолжим представление ρ до однозначного представления группы $\mathfrak{G}$. Тогда ядром такого представления по-прежнему является N *), т. е. оно является точным для $\mathfrak{G}/N$. Теорема доказана.

Следствие. *Всякая связная полупростая комплексная группа Ли является алгебраической.*

Это утверждение вытекает из теоремы 5.

Приведем (без доказательства) также некоторые свойства сопряженности, имеющие аналоги в компактном случае.

---

*) Действительно, точное представление алгебры Ли группы $\mathfrak{U}$ продолжается до точного представления ее комплексной оболочки.

3° *Максимальная компактная подгруппа в полупростой комплексной связной группе G определяется однозначно с точностью до сопряженности.*

При доказательстве этой теоремы (см., например, [42]) многообразие $G/\mathfrak{U}$ рассматривается как односвязное риманово пространство (отрицательной кривизны). Используется теорема Э. Картана, согласно которой всякая компактная подгруппа в группе движений такого пространства имеет неподвижную точку. Рассмотрим в качестве такой подгруппы максимальную компактную подгруппу $\mathfrak{U}_1$. Пусть x — элемент из G, для которого класс смежности $x\mathfrak{U}$ неподвижен относительно $\mathfrak{U}_1$. Тогда имеем $\mathfrak{U}_1 x \subset x\mathfrak{U}$, откуда $x^{-1}\mathfrak{U}_1 x \subset \mathfrak{A}$. Из максимальности $\mathfrak{U}_1$ следует, что $x^{-1}\mathfrak{U}_1 x = \mathfrak{U}$.

Следовательно, всякая максимальная компактная подгруппа в группе G является связной.

4° *Любые две подалгебры Картана в полупростой комплексной алгебре X сопряжены относительно присоединенной группы $\mathfrak{G}_0$.*

Это утверждение можно получить как следствие 3°, однако известно и независимое доказательство (см., например, [128]). Более того, можно утверждать, что искомый автоморфизм из $\mathfrak{G}_0$ может быть выбран в виде $\exp D_z$, где D_z — нульстепенный оператор в X.

Далее, скажем, что точка $g \in G$ является регулярной, если оператор присоединенного представления $\pi(g)$ содержит собственное значение 1 с кратностью $r = \operatorname{rang} G$ *). Максимальная коммутативная подгруппа в G, содержащая регулярный элемент, называется *подгруппой Картана.*

5° *Любые две подгруппы Картана сопряжены в группе G относительно внутреннего автоморфизма.*

Отсюда, в частности, следует, что всякая подгруппа Картана изоморфна подгруппе D из теоремы 6; следовательно, она является связной.

Можно также показать ([116]), что *любые две максимальные разрешимые подалгебры сопряжены в алгебре X; соответственно любые две максимальные разрешимые подгруппы сопряжены в группе G.* Разложе-

*) См. стр. 463.

ние Гаусса (теорема 6) и разложение Ивасавы (теорема 7) определяются однозначно с точностью до сопряжения ([85], [92], [113]).

Таким образом, любая полупростая комплексная связная группа Ли имеет структуру, во многих отношениях сходную со структурой группы $SL(n, \boldsymbol{C})$. Заметим, что в случае классических групп все указанные выше утверждения легко проверяются непосредственно. Поэтому новая информация получена, в сущности, для особых групп Картана с алгебрами Ли $G_2 - E_8$. В частности, все эти группы допускают точное линейное представление.

Существенно, что в классе вещественных полупростых групп Ли аналог теоремы 12 не имеет места. Существуют группы этого класса с бесконечным (дискретным) центром; все такие группы не допускают точного линейного представления. (Предлагается в качестве упражнения показать, что этим свойством обладает универсальная накрывающая группы $SL(2, \boldsymbol{R})$*).)

§ 105. Группа Вейля

При изучении структуры полупростой комплексной алгебры Ли и ее линейных представлений важнейшую роль играет симметрия в классе корней и корневых векторов, существование которой было установлено в гл. XIV. Более детальное изучение этой симметрии позволяет связать с каждой комплексной полупростой алгеброй Ли некоторую конечную группу симметрий, называемую группой Вейля. В случае алгебры $sl(n, \boldsymbol{C})$ эта группа определяется как группа подстановок n базисных векторов.

Пусть X — полупростая комплексная алгебра Ли и H — ее фиксированная картановская подалгебра. Для каждой пары векторов α, $h \in H$ преобразование

$$s_\alpha h = h - \frac{2(\alpha, h)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

*) Следовательно, также эта универсальная накрывающая не допускает комплексификации.