Теорема 15. *Группа Вейля действует просто транзитивно на совокупности камер Вейля.*

(Говорят, что группа $G$ действует *просто транзитивно* на множестве $M$, если для каждой пары точек $m_1, m_2 \in M$ существует одно и только одно преобразование группы $G$, переводящее $m_1$ в $m_2$.)

Действительно, как мы видели при доказательстве теоремы 13, группа Вейля действует транзитивно на совокупности камер Вейля. В частности, $sK = K_+$ для каждой камеры Вейля $K$. Если $s_1K = K_+$ и $s_2K = K_+$, то $s_1s_2^{-1}K_+ = K_+$. Согласно 2° отсюда заключаем, что $s_1s_2^{-1} = e$, т. е. $s_1 = s_2$.

Система $\Phi$, состоящая из корней, называется *фундаментальной*, если каждый корень $\alpha$ однозначно представляется в виде $\sum_j k_j\varphi_j$, $\varphi_j \in \Phi$, где числа $k_j$ одновременно либо положительны, либо отрицательны. Из теоремы 15 вытекает

Следствие. *Группа Вейля просто транзитивна на совокупности всех фундаментальных систем* *).

Доказательство предоставляется читателю. (Достаточно установить соответствие между фундаментальными системами и камерами Вейля; см. также [128].) В заключение отметим еще одну замечательную характеристику группы Вейля:

3° *Группа Вейля изоморфна $A/A_0$, где $A$ — совокупность всех внутренних автоморфизмов, сохраняющих картановскую подалгебру $H$, и $A_0$ — подгруппа всех автоморфизмов вида* $\exp D_h$, $h \in H$.

Доказательство см., например, в [128], стр. 182—187.

## § 106. Существование комплексной оболочки

До сих пор мы откладывали решение принципиального вопроса о существовании комплексной оболочки у произвольной компактной группы Ли. Теперь приступим

*) Отсюда, в частности, нетрудно получить, что всякий корень $\omega$ может быть сделан простым относительно некоторого лексикографического упорядочения.

к решению этого вопроса. При доказательстве будем опираться только на глобальную теорему (гл. IV).

Пусть $G$ — произвольная компактная группа Ли. Поскольку $G$ допускает точное линейное унитарное представление, мы будем считать, что $G$ линейна, и записывать каждый элемент $g \in G$ в виде унитарной матрицы $\| g_{ij} \|_{i,\, j=1,\, 2,\, \ldots,\, n_0}$. Функцию $f(g)$ мы назовем *полиномом* на группе $G$, если она представима в виде полинома от переменных $g_{ij}$, $\overline{g_{ij}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n_0$.

Лемма 1. *Функция $f(g)$ является полиномом на группе $G$ тогда и только тогда, когда она представима в виде линейной комбинации матричных элементов группы $G$.*

Доказательство. Напомним, что матричные элементы группы $G$ суть матричные элементы ее неприводимых представлений. Согласно глобальной теореме каждое такое представление содержится в классе тензоров; следовательно, его матричные элементы являются полиномами на $G$. С другой стороны, каждый одночлен от $g_{ij}$, $\overline{g_{ij}}$ является матричным элементом тензорного произведения вида $g \otimes g \otimes \ldots \otimes \hat{g} \otimes \ldots \otimes \hat{g}$, где $\hat{g} = g'^{-1} = \bar{g}$ — контрагредиентное представление $G$. В силу принципа полной приводимости этот одночлен раскладывается в сумму матричных элементов группы $G$. Лемма доказана.

Условимся записывать каждое неприводимое представление группы $G$ в виде матрицы

$$\tau^{\alpha}(g) = \| \tau^{\alpha}_{pq}(g) \|_{p,\, q=1,\, 2,\, \ldots,\, N},$$

где $\alpha$ — дискретный индекс, нумерующий представление, и $N = \dim \tau^{\alpha}$. Между матрицами $\tau^{\alpha}(g)$ существуют следующие соотношения:

$$\tau^{\alpha}(g) \otimes \tau^{\beta}(g) = C^{-1} \left( \tau^{\alpha_1}(g) \oplus \ldots \oplus \tau^{\alpha_m}(g) \right) C,$$

с постоянными матрицами $C$ (зависящими от $\alpha$, $\beta$). Действительно, каждое из этих соотношений выражает разложение $\tau^{\alpha} \otimes \tau^{\beta}$ на неприводимые компоненты. Для матричных элементов соответственно имеем

$$\tau^{\alpha}_{pq}(g)\, \tau^{\beta}_{kl}(g) = \sum_{\gamma,\, m,\, n} c^{\gamma}_{mn}(\alpha, \beta;\ p, q;\ k, l)\, \tau^{\gamma}_{mn}(g).$$

Мы условимся называть такие соотношения *соотношениями Клебша — Гордана.* Если выразить каждый из матричных элементов в виде полинома от $g_{ij}$, $\overline{g_{ij}}$, то получаем систему алгебраических соотношений

$$\Phi^{\alpha\beta}_{pq,\,kl}(g_{ij},\ \bar{g}_{ij}) = 0, \qquad (*)$$

которым удовлетворяют все матрицы $g \in G$. Условимся называть такие соотношения *фундаментальными соотношениями для группы* $G$. Докажем, что имеет место

Лемма 2. *Система чисел* $\xi^{\alpha}_{pq}$ *удовлетворяет соотношениям Клебша — Гордана*

$$\xi^{\alpha}_{pq}\xi^{\beta}_{kl} = \sum_{\gamma,\,m,\,n} c^{\gamma}_{mn}(\alpha, \beta;\ p, q;\ k, l)\,\xi^{\gamma}_{mn}$$

*тогда и только тогда, когда эти числа могут быть представлены в виде* *)

$$\xi^{\alpha}_{pq} = \tau^{\alpha}_{pq}(x_{ij},\ y_{ij}),$$

*где числа* $x_{ij}$, $y_{ij}$ *удовлетворяют фундаментальным соотношениям* $(*)$ *с заменой* $g_{ij}$ *на* $x_{ij}$, $\bar{g}_{ij}$ на $y_{ij}$.

Доказательство. Заметим вначале, что если исходное представление группы $G$ неприводимо, то параметры $g_{ij}$, $\overline{g_{ij}}$ сами входят в число матричных элементов группы $G$. В общем случае мы положим

$$g_{ij} = \sum \lambda_{ij}(\alpha, p, q)\,\tau^{\alpha}_{pq}(g), \quad \overline{g_{ij}} = \sum \mu_{ij}(\alpha, p, q)\,\tau^{\alpha}_{pq}(g).$$

Здесь суммирование ведется по $\alpha$, $p$, $q$ и обе суммы конечны. Если числа $\xi^{\alpha}_{pq}$ удовлетворяют соотношениям Клебша — Гордана, то мы положим

$$x_{ij} = \sum \lambda_{ij}(\alpha, p, q)\,\xi^{\alpha}_{pq}, \quad y_{ij} = \sum \mu_{ij}(\alpha, p, q)\,\xi^{\alpha}_{pq}.$$

Тогда эти числа, очевидно, удовлетворяют соотношениям $(*)$. Фиксируем теперь индекс $\alpha = \alpha_0$ и рассмотрим представление в классе тензоров, содержащее $\tau^{\alpha_0}$; тогда

---

*) В правой части имеется в виду подстановка чисел $x_{ij}$, $y_{ij}$ в полином $\tau^{\alpha}_{pq}(g_{ij},\ \overline{g_{ij}})$. Заметим, что полином $\tau^{\alpha}_{pq}$ определяется своими значениями на группе $G$ неоднозначно; здесь мы имеем в виду любое из таких представлений.

мы имеем

$$U^{-1}(g \otimes g \otimes \ldots \otimes \bar{g} \otimes \ldots \otimes \bar{g})\, U = \tau^{\alpha_0}(g) \oplus \ldots$$

Разлагая в свою очередь представления $g$ и $\bar{g}$ на неприводимые, получаем в левой части формальный полином (относительно операций $\otimes$, $\oplus$). Соответствующие соотношения между матричными элементами являются следствием сотношений Клебша — Гордана. Следовательно, они не изменятся, если вместо $\tau^{\alpha}_{pq}(g)$ сделать подстановку чисел $\xi^{\alpha}_{pq}$. В результате

$$\xi^{\alpha_0}_{pq} = \tau^{\alpha_0}_{pq}(x_{ij}, y_{ij}),$$

где числа $x_{ij}$, $y_{ij}$ выражаются указанными выше формулами через $\xi^{\alpha}_{pq}$. С другой стороны, если числа $x_{ij}$, $y_{ij}$ удовлетворяют соотношениям (*), то для чисел $\xi^{\alpha}_{pq}$ автоматически выполняются соотношения Клебша — Гордана. Лемма доказана.

Замечание. Если матрицы $x = \|x_{ij}\|$, $y = \|y_{ij}\|$ удовлетворяют фундаментальным соотношениям, то $xy' = e$, где штрих означает транспонирование.

Действительно, в число фундаментальных соотношений для матрицы $g \in G$ входит условие унитарности:

$$gg^* = e,$$

которое выражает тот факт, что в тензорном произведении $g \otimes \bar{g}$ содержится единичное представление. Заменяя $g$ на $x$ и $\bar{g}$ на $y$, получаем нужное соотношение.

Введем теперь обозначение $\mathscr{A}(G)$ для множества всех пар $x$, $y$, удовлетворяющих системе фундаментальных соотношений

$$\Phi(x, y) = 0,$$

где $\Phi$ — один из полиномов системы (*). Тогда $\mathscr{A}(G)$ является алгебраическим многообразием в $M(2n_0)$. Поскольку $y = x'^{-1}$, то $\mathscr{A}(G)$ мы можем рассматривать вложенным в группу $\mathrm{GL}(n_0, \boldsymbol{C})$:

$$\mathscr{A}(G) \subset \mathrm{GL}(n_0, \boldsymbol{C}).$$

Лемма 3. *Многообразие $\mathscr{A}(G)$ является группой.*

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно проверить, что если два набора $\xi = \{\xi^\alpha_{pq}\}$, $\eta = \{\eta^\alpha_{pq}\}$ удовлетворяют соотношениям Клебша—Гордана, то «произведение» $\zeta = \xi\eta$, составленное из чисел

$$\zeta^\alpha_{pq} = \sum_{l=1}^{N} \xi^\alpha_{pl}\eta^\alpha_{lq},$$

также удовлетворяет соотношениям Клебша — Гордана. Положим $\xi^\alpha = \|\xi^\alpha_{pq}\|$, $\eta^\alpha = \|\eta^\alpha_{pq}\|$, $\zeta^\alpha = \|\zeta^\alpha_{pq}\|$; тогда $\zeta^\alpha = \xi^\alpha\eta^\alpha$, и согласно известному правилу тензорных произведений мы имеем

$$\zeta^\alpha \otimes \zeta^\beta = (\xi^\alpha \otimes \xi^\beta)(\eta^\alpha \otimes \eta^\beta).$$

Используя соотношения Клебша — Гордана для наборов $\xi$, $\eta$, заключаем, что $\zeta^\alpha \otimes \zeta^\beta = C^{-1}(\zeta^{\alpha_1} \oplus \zeta^{\alpha_2} \oplus \ldots \oplus \zeta^{\alpha_n})C$. Кроме того, согласно замечанию на стр. 477 матрицы из $\mathscr{A}(G)$ обратимы в $\mathscr{A}(G)$. Лемма доказана.

Согласно построению группа $G$ содержится в $\mathscr{A}(G)$. Следовательно, $G$ содержится также в $\mathscr{A}(G) \cap \mathrm{U}(n_0)$.

Лемма 4. *Группа $G$ совпадает с совокупностью всех унитарных матриц из $\mathscr{A}(G)$.*

Доказательство. Положим $G_1 = \mathscr{A}(G) \cap \mathrm{U}(n_0)$. Поскольку группа $G_1$ линейна, всякий ее матричный элемент является полиномом от $x_{ij}$, $\overline{x_{ij}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; последние переменные в свою очередь могут быть разложены по матричным элементам $\tau^\alpha_{pq}(x_{ij}, \overline{x_{ij}})$ (см. доказательство леммы 2). Из равенства таких полиномов нулю на группе $G$ следует их равенство нулю на $G_1$ *). Следовательно, всякое неприводимое представление группы $G_1$ остается неприводимым при сужении на $G$. Как мы видели в § 31 **), отсюда следует равенство $G_1 = G$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Группа $\mathscr{A}(G)$ является правильной комплексной оболочкой группы $G$.*

Доказательство. Заметим, что группа $\mathscr{A}(G)$ вместе с каждым элементом $g$ содержит также $g^*$. Дей-

*) Действительно, матричные элементы линейно независимы на $G$ (теорема Бернсайда).

**) См. упражнение на стр. 129.

ствительно, матрица $C$ в соотношениях Клебша — Гордана унитарна, и это позволяет заменить каждый элемент $\xi^\alpha$ на $(\xi^\alpha)^*$. Следовательно, $\mathscr{A}(G)$ содержит также элемент $\rho^2 = gg^*$. Покажем, что $\mathscr{A}(G)$ содержит матрицу $\rho$.

Пусть $p$ — произвольная положительно определенная эрмитова матрица из $\mathscr{A}(G)$; положим $p = x^{-1}\varepsilon x$, где матрица $\varepsilon$ диагональна. Если $f(g)$ — один из определяющих полиномов для $\mathscr{A}(G)$, то $f(p^m) = 0$ для всех значений $m = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно,

$$f(x^{-1}\varepsilon^m x) = 0, \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

Поскольку левая часть является полиномом от собственных значений матрицы $\varepsilon$, то отсюда следует также, что $f(x^{-1}\varepsilon^\lambda x) = 0$ для любого комплексного $\lambda$. Следовательно, матрица $p^\lambda$ содержится в $\mathscr{A}(G)$ при любом комплексном $\lambda$. Полагая, в частности, $p = \rho^2$, заключаем, что $\rho^\lambda$ содержится в $\mathscr{A}(G)$ при любом комплексном $\lambda$. Следовательно, унитарная матрица $u$ в полярном разложении

$$g = \rho u$$

также содержится в $\mathscr{A}(G)$. Поскольку $\rho$ и $u$ непрерывно зависят от $g$, то отсюда получаем, что многообразие $\mathscr{A}(G)$ изоморфно прямому произведению:

$$\mathscr{A}(G) \approx \mathscr{L} \times G,$$

где $\mathscr{L}$ — совокупность всех положительно определенных матриц из $\mathscr{A}(G)$. Если $p \in \mathscr{L}$, то $p^\lambda \in \mathscr{A}(G)$ при всех комплексных $\lambda$; в частности, $p^{i\varphi}$ содержится в $G$ при всех вещественных $\varphi$. Следовательно, $\dim \mathscr{L} \leqslant \dim G$. С другой стороны, если $u \in G$, $u = \exp ih$, то аналогичное рассуждение показывает, что $\exp th \in \mathscr{A}(G)$ при любом вещественном $t$. Следовательно, $\dim \mathscr{L} = \dim G$. В результате, если $X$ — алгебра Ли группы $G$ и $\mathscr{A}(X)$ — алгебра Ли $\mathscr{A}(G)$, то мы имеем разложение в прямую сумму:

$$\mathscr{A}(X) = X + iX.$$

Следовательно, $\mathscr{A}(G)$ является комплексной оболочкой группы $G$. Кроме того, $\mathscr{A}(G) \approx \mathscr{L} \times G$, где $\mathscr{L}$ является

евклидовым пространством. Следовательно, каждая связная компонента группы $\mathcal{A}(G)$ содержит лишь одну связную компоненту группы $G$. Лемма доказана.

В результате получена следующая фундаментальная

Теорема 16. *Всякая компактная группа Ли имеет правильную комплексную оболочку.*

Нетрудно показать, что эта оболочка определяется однозначно (с точностью до изоморфизма). С другой стороны, как показано в § 101, всякая связная редуктивная комплексная группа Ли содержит компактную вещественную форму. Комбинируя с теоремой 16, получаем

Следствие. *Множество всех надкомпактных связных групп Ли совпадает с множеством всех редуктивных связных комплексных групп Ли.*

Заодно мы получили еще одно доказательство алгебраичности компактной группы Ли. Кроме того, мы видим, что ее комплексная оболочка также алгебраична.

**Упражнение**

Показать, что всякая полупростая комплексная связная группа $G$ допускает разложение вида $\mathfrak{U}E\mathfrak{U}$, где подгруппы $\mathfrak{U}$ и $E$ те же, что и в разложении Ивасавы. (Указание: привести положительно определенную матрицу $a = gg^*$ к диагональному виду с помощью унитарного преобразования $u \in \mathfrak{U}$ *).)

## § 107. Некоторые дополнительные результаты

Остановимся вкратце на некоторых вопросах, близких к тем, которые рассматривались в этой главе. Прежде всего, в предыдущем параграфе, помимо доказательства основной теоремы, мы получили еще значительную информацию о свойствах компактной группы Ли. Этот круг идей известен под названием *теории двойственности.*

Пусть $G$ — компактная группа Ли и индекс $\alpha$ нумерует все ее неприводимые представления (рассматриваемые с точностью до эквивалентности). Введем линейное пространство $B$ как линейную оболочку формальных символов $e^{\alpha}_{pq}$, $p, q = 1, 2, \ldots, N_\alpha$, где $N_\alpha$ — размер-

*) См. доказательство леммы 5.