ГЛАВА XVI

ОПИСАНИЕ НЕПРИВОДИМЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В этой главе будет построена глобальная теория неприводимых (конечномерных) представлений произвольной связной группы Ли. Мы увидим, что решение этого вопроса сводится, по существу, к рассмотрению компактных групп Ли. В свою очередь, если ограничиться компактными группами Ли, то основная техническая сложность приходится на долю полупростых (в действительности на долю простых) связных групп Ли. Используя аналитическое продолжение, мы можем ограничиться рассмотрением полупростых комплексных групп Ли.

Теория неприводимых представлений полупростой комплексной группы Ли может быть построена с помощью инфинитезимального метода (подобно тому как в гл. V мы рассматривали группу SU(2)). Однако глобальный подход обладает преимуществом большей завершенности, поскольку каждое представление строится эффективно в виде чрезвычайно простой «канонической модели». Некоторые вопросы инфинитезимальной методики будут рассмотрены в следующей главе.

§ 108. Основная теорема

Мы будем рассматривать в этой главе произвольную комплексную редуктивную связную группу G. Согласно результатам гл. XV эта группа надкомпактна (и потому алгебраична). Кроме того, она обладает разложением Гаусса, которое мы будем записывать в виде

$$G = \overline{Z_- D Z_+}.$$

Здесь черта означает замыкание множества $G_{\mathrm{reg}} = Z_- D Z_+$. Напомним, что множество G_{reg} получается удалением из G некоторого «сингулярного» подмногообра-

зия, размерность которого меньше размерности G. Здесь D — «диагональная» (картановская) подгруппа, Z_-, Z_+ — «корневые» подгруппы, которые порождаются касательными векторами $e_{-\omega}$, e_ω, $\omega > 0$. Z_- и Z_+ односвязны и нильпотентны.

Мы условимся рассматривать представление группы G только в *комплексных* векторных пространствах. Если использовать замечание, сделанное в конце доказательства теоремы 6 в гл. XV, то нетрудно заключить, что во всяком линейном представлении группы G существует базис, относительно которого элементы из Z_-, D, Z_+ становятся нижними треугольными (с единицами на диагонали), диагональными и верхними треугольными (с единицами на диагонали). Однако этим замечанием мы сейчас не будем пользоваться.

Займемся систематическим описанием всех неприводимых представлений группы G.

Определение 1. Пусть $g \to T_g$ — произвольное конечномерное представление группы G в (комплексном) векторном пространстве V. Вектор $\xi \in V$ мы называем *старшим вектором* этого представления, если

$$T_z\xi = \xi$$

для всех элементов $z \in Z_+$ и если, кроме того, вектор ξ является собственным относительно картановской подгруппы D:

$$T_\delta\xi = \alpha(\delta)\xi \qquad (\xi \neq 0),$$

где $\delta \in D$. Функция $\alpha(\delta)$ (которая, очевидно, является характером группы D) называется *старшим весом* данного представления.

Заметим, что группа $R_+ = DZ_+$ является разрешимой связной группой Ли и группа Z_+ является ее производной подгруппой. Согласно теореме Ли (§ 88) в любом конечномерном представлении группы R_+ существует вектор, собственный относительно R_+. Всякий такой вектор автоматически является инвариантом подгруппы Z_+. Следовательно, всякое конечномерное представление группы G обладает хотя бы одним старшим вектором.

Теорема 1. *Всякое неприводимое представление группы G обладает единственным (с точностью до*

множителя) старшим вектором. Соответствующий старший вес определяет данное неприводимое представление с точностью до эквивалентности.

Пусть $\alpha(\delta)$ — *старший вес данного представления и* $\alpha(g)$ — *значение функции* $\alpha(\delta)$ *на диагональной компоненте* δ *в разложении Гаусса* $g = \zeta\delta z$, $\zeta \in Z_-$, $\delta \in D$, $z \in Z_+$. *Тогда* $\alpha(g)$ — *аналитическая фнукция на группе* G *и представление может быть реализовано следующей формулой:*

$$T_g f(z) = \alpha(z, g) f(z_g).$$

Здесь $\alpha(z, g) = \alpha(zg)$ *и элемент* $z_g \in Z_+$ *определяется как правая компонента* $\tilde{z}$ *в разложении Гаусса* $zg = \tilde{\zeta}\tilde{\delta}\tilde{z}$. *Пространство представления состоит из полиномов на группе* $Z = Z_+$ **) и является линейной оболочкой всевозможных функций* $f_g(z) = \alpha(z, g)$, $g \in G$.

Старшим вектором в данной модели является функция $f_e(z) \equiv 1$ *на группе* Z. *Всякий матричный элемент данного представления является линейной комбинацией функций* $\varphi(g) = \alpha(g_1 g g_2)$, *где* g_1, g_2 *пробегают* G.

Доказательство. Пусть T — неприводимое представление группы G и $f_0(g) = (T_g x_0, y_0)$ — его произвольный матричный элемент. Согласно теореме Ли мы можем выбрать векторы x_0, y_0 таким образом, чтобы они были собственными относительно DZ_+, DZ_- соответственно. Тогда имеем

$$f_0(\zeta\delta z) = \alpha(\delta)(x_0, y_0) = \beta(\delta)(x_0, y_0),$$

где $\alpha(\delta)$ — собственное значение оператора T_δ на векторе x_0 и $\beta(\delta)$ — собственное значение сопряженного оператора T'_δ на векторе y_0. Если $(x_0, y_0) = 0$, то $(T_g x_0, y_0) = 0$ тождественно на группе G, и это означало бы, что циклическая оболочка вектора x_0 ортогональна вектору y_0. Из неприводимости T вытекало бы в этом случае, что либо $x_0 = 0$, либо $y_0 = 0$, что исключается теоремой Ли. Следовательно, $\alpha(\delta) = \beta(\delta)$, и мы имеем

$$f_0(\zeta\delta z) = \alpha(\delta),$$

---

*) То есть из полиномов от канонических координат в Z.

если нормировать векторы x_0, y_0 таким образом, чтобы $(x_0, y_0) = 1$. Если x_0' — какой-либо другой старший вектор представления T, то мы по-прежнему имеем $\alpha'(\delta) = \beta(\delta)$, и вектор x_0' можно нормировать так, чтобы $(x_0', y_0) = 1$. Отсюда следует равенство $\alpha'(\delta) = \alpha(\delta)$ и также

$$((x_0 - x_0'), y_0) = 0.$$

Поскольку вектор $x_0 - x_0'$ по-прежнему имеет собственное значение $\alpha(\delta)$, то либо он равен нулю, либо также является старшим вектором представления T. Последнее, как мы видели выше, невозможно ввиду ортогональности $x_0 - x_0'$ и y_0. Следовательно, $x_0' = x_0$. Единственность старшего вектора доказана.

Пусть $\mathscr{L}_T$ — линейная оболочка всех матричных элементов представления T. Тогда $\mathscr{L}_T$ инвариантно и неприводимо относительно двусторонних сдвигов:

$$T_{g_1 g_2} f(g) = f(g_1^{-1} g g_2).$$

Следовательно, $\mathscr{L}_T$ является циклической оболочкой функции $\alpha(g) = f_0(g)$. Если два неприводимых представления T, T' имеют одинаковый старший вес $\alpha(\delta)$, то $\mathscr{L}_T = \mathscr{L}_{T'}$, откуда заключаем, что T эквивалентно T'.

Рассуждая, как в гл. VII при построении «канонической модели», мы реализуем представление T_g в классе функций на группе $Z = Z_+$. При этом пространство представления состоит из всевозможных функций вида

$$f(z) = (T_z x, y_0),$$

где x пробегает исходное пространство представления T. Поскольку $Z = Z_+$ — односвязная нильпотентная группа, то всякий элемент $z \in Z$ однозначно записывается в виде $z = \exp a$, где a — элемент алгебры Ли группы Z. Следовательно,

$$T_z = \exp A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots,$$

где A — инфинитезимальный оператор группы Z. Поскольку A — треугольная матрица с нулями на главной диагонали, то $A^m = 0$ при некотором m. Полагая

$A = \sum_i t_i A_i$ (относительно некоторого базиса в алгебре Ли), заключаем, что T_z является полиномом относительно канонических координат t_i. Теорема доказана.

Реализацию неприводимого представления, указанную в теореме 1, мы будем называть *канонической моделью* или *реализацией на группе Z*.

Функцию $\alpha(g)$, введенную в условиях теоремы 1, мы будем называть *производящей функцией* данного представления. Имеем:

1° $\alpha(\zeta g z) = \alpha(g)$;

2° $\alpha(\delta g) = \alpha(g\delta) = \alpha(g) \cdot \alpha(\delta)$

для всех значений $\zeta \in Z_-$, $z \in Z_+$, $\delta \in D$, $g \in G$. Соответствующая функция двух переменных $\alpha(z, g) = \alpha(zg)$ обладает следующими свойствами:

3° $\alpha(z, g_1 g_2) = \alpha(z, g_1)\alpha(z_{g_1}, g_2)$;

4° $\alpha(z, z_0) = 1$;

5° $\alpha(z, \delta) = \alpha(\delta)$.

Здесь, z, z_0 пробегают группу $Z = Z_+$ и $\delta \in D$. Первое условие очевидно ввиду соотношений мультипликативности для операторов T_g. Из остальных двух условий мы получаем в свою очередь чрезвычайно простые правила действия для преобразований из D и Z:

$$T_{z_0} f(z) = f(zz_0), \quad T_\delta f(z) = \alpha(\delta) f(\delta^{-1} z \delta).$$

Мы будем существенно использовать эти правила в дальнейшем.

§ 109. Старшие веса и сигнатуры

Назовем характер $\alpha(\delta)$ группы D *индуктивным*, если он является старшим весом одного из неприводимых представлений группы G. Пространство канонической модели обозначим $\mathfrak{R}_\alpha$ и само неприводимое представление со старшим весом $\alpha(\delta)$ обозначим символом $d(\alpha)$. Для полного описания всех возможных неприводимых представлений группы G осталось перечислить все индуктивные характеры. Отметим пока только их простейшие свойства.