где t — аддитивный параметр в Z^0, $\lambda(g_0)$ — одномерное представление редуктивной группы G^0 и коэффициенты α, β, γ, δ зависят от параметров n, g, но не зависят от параметра t. При этом нетрудно проверить, что $m = l_\omega = 2(l, \omega)/(\omega, \omega)$, т. е. m — числовая отметка сигнатуры l на простом корне ω. Из полученной формулы вытекает следующие важные следствия:

Следствие 1. *Положим* $z = (\exp te_\omega)z'$, *где* ω — *простой корень и* z' *пробегает подгруппу в группе* Z, *порожденную касательными векторами* $e_{\omega'}$, $\omega' > 0$, $\omega' \neq \omega$. *Тогда все функции* $f(z) \in \mathfrak{R}_\alpha$ *являются полиномами от* t *степени не выше* l_ω.

Следствие 2. *Пространство* $\mathfrak{F}^\omega$ *всех функций на группе* Z, *которые являются полиномами от параметра* t *степени не выше* l_ω, *инвариантно относительно операторов* T_g *представления* $d(\alpha)$.

Следствие 3. *Пусть* $\mathscr{D}_i$ — *аналитический инфинитезимальный оператор левого сдвига на группе* Z, *отвечающий корневому вектору* e_{ω_i}, *где* ω_i — *простой корень*, $i = 1, 2, \ldots, r$. *Пусть* $\mathfrak{R}'_\alpha$ — *пространство всех решений системы дифференциальных уравнений*

$$\mathscr{D}_i^{l_i+1} f(z) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{**}$$

в классе всех комплексно-аналитических функций на группе Z. *Здесь положено* $l_i = l_{\omega_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. *Тогда* $\mathfrak{R}'_\alpha$ *инвариантно относительно операторов* T_g *представления* $d(\alpha)$.

Действительно, $\mathfrak{R}'_\alpha = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{F}^{\omega_i}$.

Систему (**) мы будем называть *индикаторной системой* на группе Z с сигнатурой $l = (l_i)$.

§ 111. Полиномы на группе Z

Как мы знаем *), все комплексно-аналитические неприводимые представления надкомпактной группы конечномерны. Этот критерий можно было бы взять за

*) См. § 42.

основу при описании множества всех сигнатур. Очевидно, характер $\alpha(\delta)$ индуктивен тогда и только тогда, когда соответствующая функция $\alpha(g)$, первоначально определенная на множестве G_{reg}, может быть продолжена до функции, аналитической (и однозначной) на группе G. Однако непосредственное изучение такого продолжения представляется затруднительным, и мы предпочтем окольный путь.

В основу будет положено рассмотрение индикаторных систем на группе Z. При этом мы одновременно будем рассматривать не только комплексно-аналитические, но также и вещественно-аналитические (т. е. все конечномерные вещественные) неприводимые представления группы G.

Пусть $\mathscr{D}_i$, $\overline{\mathscr{D}}_i$ — аналитический и антианалитический инфинитезимальные операторы левого сдвига на группе Z, отвечающие вектору e_{ω_i}, $i = 1, 2, \ldots, r$, где ω_i — простой корень. Систему уравнений вида

$$\mathscr{D}_i^{l_i+1} f(z) = 0, \quad \overline{\mathscr{D}}_i^{k_i+1} f(z) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

мы будем называть *индикаторной системой* на группе Z. В частном случае $k_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, мы получаем равенство нулю не только операторов $\overline{\mathscr{D}}_i$, но и всех их коммутаторов, т. е. всех антианалитических операторов левого сдвига на Z. Отсюда, очевидно, следует, что функция $f(z)$ является комплексно-аналитической целой функцией от канонических параметров в группе Z. Оставшаяся система уравнений

$$\mathscr{D}_i^{l_i+1} f(z) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

совпадает с индикаторной системой в классе аналитических функций, введенной в предыдущем параграфе. Удвоенную систему параметров $l = (l_i)$, $k = (k_i)$ (l_i, k_i — неотрицательные целые числа) мы по-прежнему будем называть *сигнатурой*.

В основе всех дальнейших построений лежит следующая теорема:

Теорема 3. *Пространство решений любой индикаторной системы конечномерно и состоит из полиномов на группе Z.*

Доказательство. Докажем вначале самостоятельное утверждение, которое является обобщением леммы 2 из § 65. Пусть L — нильпотентная алгебра Ли, L' — производная подалгебра и $e_1, e_2, \ldots, e_l$ — система элементов, дополняющих базис в L' до базиса в алгебре L. Нетрудно видеть, что $e_1, e_2, \ldots, e_l$ являются образующими в алгебре L, т. е. их коммутаторы порождают L' *). Элементы $e_1, e_2, \ldots, e_l$ назовем *каноническими образующими* в L.

Основная лемма. *Пусть L — нильпотентная алгебра Ли с каноническими образующими $e_1, e_2, \ldots, e_l$. Пусть $x \to D(x)$ — представление алгебры L в пространстве V (возможно, бесконечномерном) и V_0 — подпространство, на котором*

$$D(e_i)^{m_i+1} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, l,$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_l$ — неотрицательные целые числа. Тогда операторы $D(x)$, $x \in L$, нульстепенны в V_0 с показателем нульстепенности, равномерно ограниченным по x:

$$D(x)^{m+1} = 0, \qquad x \in L.$$

Доказательство леммы. Пусть n — размерность алгебры. Доказательство будем вести индукцией по n. Фиксируем одну из образующих, скажем e_1, и пусть L_1 — линейная оболочка элементов $e_2, e_3, \ldots, e_l$ и коммутаторов всех элементов $e_1, e_2, \ldots, e_l$; тогда, очевидно,

$$L = L_0 + L_1,$$

где $L_0 = \{e_1\}$ и L_1 является идеалом в L размерности $n - 1$. Среди элементов вида

$$e_{ij} = \hat{e}_1^j e_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, l, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

*) Действительно, пусть $L_k = [L, L_{k-1}]$ — центральный ряд в алгебре $L_0 = L$: $L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_p = (0)$, и пусть A_k — дополнение L_k до L_{k-1}; тогда мы имеем $[A_i, A_j] \subset L_k$, где $k = \max(i, j)$; отсюда легко получить, что всякий элемент из L_k записывается в виде линейной комбинации элементов из $[A_i, A_j]$, $i, j \leqslant k$, с точностью до элементов из L_{k+1}. Применяя это правило индуктивно, заключаем, что всякий элемент из L_k записывается в виде линейной комбинации кратных коммутаторов элементов из A_1 (с точностью до элементов из L_{k+1}). Полагая $k = p, p-1, \ldots, 1$, получаем нужное утверждение: $L_1 = A_1 + [A_1, A_1] + [A_1, [A_1, A_1]] + \ldots$

содержится система образующих подалгебры L_1. (Здесь $\hat{a}$ означает, как обычно, оператор $\hat{a}x = [a, x]$.) Соответственно среди операторов $\mathscr{D}_{ij} = D(e_{ij})$ содержится система образующих алгебры $D(L_1)$. Далее, пусть $A = D(e_1)$, $B = D(e_i)$ при фиксированном i. Вместо элементов $\mathscr{D}_{ij}$ нам будет удобно рассматривать их линейные комбинации

$$F(t) = e^{tA} B e^{-tA} = 1 + \mathscr{D}_{i1} + \frac{t^2}{2} \mathscr{D}_{i2} + \ldots$$

Оператор $F(t)$ определен как конечный степенной ряд на подпространстве V_0. Действительно, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2 в § 65, получаем, что оператор A нульстепенен не только на V_0, но также на BV_0. Аналогично, рассматривая $B^k V_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, получаем оператор

$$F(t)^k = e^{tA} B^k e^{-tA},$$

определенный всюду на V_0. Если k достаточно велико, то $F(t)^k = 0$ на V_0 (ввиду нульстепенности B на V_0, AV_0, A^2V_0, ...). Следовательно, оператор $F(t)$ является нульстепенным с показателем нульстепенности, равномерно ограниченным по t. Среди операторов $F(t)$ содержится, очевидно, система образующих алгебры $D(L_1)$*). Поскольку $\dim L_1 < \dim L$, мы получаем в результате, что операторы $D(x)$ нульстепенны на V_0 для всякого $x \in L_1$.

Наконец, используя формулу Кемпбелла — Хаусдорфа**), мы можем представить всякий элемент $\exp x$, $x \in L$, в виде $\exp te_1 \cdot \exp y$, $y \in L_1$, причем если $x = te_1 + z$, $z \in L_1$, то y выражается с помощью кратных коммутаторов от z, te_1; следовательно, y является полиномом от t. Соответственно имеем

$$\exp D(x) = \exp tD(e_1) \cdot \exp D(y).$$

Оператор $\exp D(y)$ является полиномом от $D(y)$ на V_0 и, следовательно, является полиномом от t. Далее,

---

*) Действительно, операторы $\mathscr{D}_{ij}$ можно выразить как линейные комбинации операторов $F(t)$ при различных значениях t.

**) Поскольку алгебра X нильпотентна, то ряд Кемпбелла — Хаусдорфа является конечным.

используя обычные рассуждения (§ 65), получаем, что $D(e_1)$ является нульстепенным не только на V_0, но также на $D(y)^k V_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Следовательно, $\exp D(x)$ является конечным рядом на V_0. Заменяя x на λx, получаем, что $\exp \lambda D(x)$ является полиномом от λ. Следовательно, $D(x)$ нульстепенен на V_0. Очевидно также, что показатель нульстепенности равномерно ограничен на L. Лемма доказана. .

Напомним теперь, что в алгебре L существует цепочка вложенных идеалов $L = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_n = (0)$, где $\dim L_{i-1}/L_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (см. § 85). Отсюда легко заключить, что односвязная группа Z с алгеброй Ли L допускает однозначное разложение в произведение односвязных однопараметрических подгрупп Z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем $R_i = Z_i Z_{i+1} \ldots Z_n$ является нормальным делителем в R_{i-1} *). Полагая

$$z(t) = z_1(t_1) z_2(t_2) \ldots z_n(t_n),$$

где $\{z_i(t)\} = Z_i$, мы можем рассматривать $t_1, t_2, \ldots, t_n$ как параметры в группе Z. Нетрудно видеть (из формулы Кемпбелла — Хаусдорфа), что эти параметры связаны с каноническими параметрами в группе Z рекуррентно и полиномиально. Введенные параметры мы будем называть *нормальными параметрами* в группе Z. Используя нормальные параметры, из основной леммы получаем

Следствие. *Пусть $\mathscr{D}_i = D(e_i)$ — инфинитезимальный оператор левого сдвига на группе Z, и пусть F_m — пространство всех решений системы дифференциальных уравнений*

$$\mathscr{D}_i^{m_i+1} f(z) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, l,$$

в классе (обычных или обобщеных) функций на группе Z. Тогда для любого набора неотрицательных целых чисел m_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, пространство F_m конечномерно и состоит из полиномов на группе Z **).

---

*) Достаточно проверить, что $Z = Z_1 R_2$; поскольку $\dim R_2 = n - 1$, где $n = \dim Z$, то наше утверждение вытекает из индукции по n.

**) Здесь группа Z рассматривается как *вещественная*.

Действительно, согласно основной лемме всякая функция

$$\varphi(t) = f(z(t)z), \qquad f \in F_m,$$

где $z(t)$ — произвольная однопараметрическая подгруппа, является полиномом от переменной t с равномерно ограниченной степенью (по f, z и $z(t)$). В частности, положим

$$z = az_i(t_i)\,b, \quad z(t) = az_i(t)\,a^{-1},$$

где $a = z_1 z_2 \cdots z_{i-1}$, $b = z_{i+1}z_{i+2}\cdots z_n$ — фиксированные элементы и t_i — нормальный параметр в группе Z с номером i; тогда мы получаем, что функция $\varphi(t)$ является полиномом от параметра t. Следствие доказано.

Остается применить полученное следствие к корневой подгруппе $Z = Z_+$. Поскольку эта группа должна рассматриваться как вещественная, то мы рассматриваем «удвоенную» систему образующих $\mathscr{D}_i$, $\overline{\mathscr{D}}_i$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что все построения предыдущих двух параграфов повторяются почти дословно для вещественного характера $\alpha(\delta)$ группы D. В частности, мы видим, что пространство $\mathfrak{R}'_\alpha$ всех решений индикаторной системы инвариантно относительно T_g. Из конечномерности $\mathfrak{R}'_\alpha$ и неприводимости T_g мы сможем в дальнейшем заключить (§ 112), что $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}'_\alpha$, т. е. пространство представления совпадает с пространством всех решений индикаторной системы.

§ 112. Завершение классификации

Теперь мы можем доказать следующую основную теорему:

Теорема 4. *Пусть G — односвязная полупростая комплексная группа Ли. Тогда вектор $l \in H$ является сигнатурой в том и только в том случае, когда все числовые отметки l_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, являются целыми неотрицательными.*

Доказательство. Необходимость условий уже доказана (§ 109). Докажем достаточность. По данному характеру $\alpha(\delta)$ определяем функцию $\alpha(g)$ с помощью