

Действительно, согласно основной лемме всякая функция

$$\varphi(t) = f(z(t)z), \quad f \in F_m,$$

где $z(t)$ — произвольная однопараметрическая подгруппа, является полиномом от переменной t с равномерно ограниченной степенью (по f , z и $z(t)$). В частности, положим

$$z = az_i(t_i)b, \quad z(t) = az_i(t)a^{-1},$$

где $a = z_1z_2 \cdots z_{i-1}$, $b = z_{i+1}z_{i+2} \cdots z_n$ — фиксированные элементы и t_i — нормальный параметр в группе Z с номером i ; тогда мы получаем, что функция $\varphi(t)$ является полиномом от параметра t . Следствие доказано.

Остается применить полученное следствие к корневой подгруппе $Z = Z_+$. Поскольку эта группа должна рассматриваться как вещественная, то мы рассматриваем «удвоенную» систему образующих \mathcal{D}_i , $\bar{\mathcal{D}}_i$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что все построения предыдущих двух параграфов повторяются почти дословно для вещественного характера $\alpha(\delta)$ группы D . В частности, мы видим, что пространство \mathfrak{N}'_a всех решений индикаторной системы инвариантно относительно T_g . Из конечномерности \mathfrak{N}'_a и неприводимости T_g мы сможем в дальнейшем заключить (§ 112), что $\mathfrak{N}_a = \mathfrak{N}'_a$, т. е. пространство представления совпадает с пространством всех решений индикаторной системы.

§ 112. Завершение классификации

Теперь мы можем доказать следующую основную теорему:

Теорема 4. Пусть G — односвязная полупростая комплексная группа Ли. Тогда вектор $l \in H$ является сигнатурой в том и только в том случае, когда все числовые отметки l_i , $i = 1, 2, \dots, r$, являются целыми неотрицательными.

Доказательство. Необходимость условий уже доказана (§ 109). Докажем достаточность. По данному характеру $\alpha(\delta)$ определяем функцию $\alpha(g)$ с помощью

формулы

$$\alpha(g) = \alpha(\xi \delta z) = \alpha(\delta)$$

в некоторой окрестности единицы группы G (где справедливо разложение Гаусса). Далее определяем функцию двух переменных $\alpha(z, g) = \alpha(zg)$. Эта функция пока определена только на множестве вида $Z_1 \times G_1$, где Z_1 — окрестность единицы в Z и G_1 — окрестность единицы в G . Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что

$$\alpha(z, g) = \alpha(z^0, g_0) = (\beta t + \delta)^{l_\omega},$$

где $z^0 = z^0(t)$ — однопараметрическая подгруппа с направляющим вектором l_ω , $\omega = \omega_i$, $i = 1, 2, \dots, r$, и параметры β, δ не зависят от t . Если l_ω — неотрицательное целое число, то заключаем отсюда, что функция $\alpha(z, g)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathcal{D}_i^{l_i+1} \alpha(z, g) = 0, \quad l_i = l_{\omega_i}.$$

Если все числовые отметки l_i , $i = 1, 2, \dots, r$, неотрицательны и целочисленны, то функция $f_g(z) = \alpha(z, g)$ содержится в конечномерном пространстве \mathfrak{R}'_α , где \mathfrak{R}'_α определяется как совокупность всех решений индикаторной системы. Следовательно, $f_g(z)$ является полиномом и потому однозначно определяется на всей группе Z .

Далее, воспользуемся формулой 3° § 108, которая вытекает из определения функции $\alpha(g)$ и справедлива при значениях g_1, g_2 , достаточно близких к единице. Эта формула позволяет определить операторы

$$T_g f(z) = \alpha(z, g) f(z_g)$$

для достаточно малых g в линейной оболочке \mathfrak{R}_α функций $f_g(z)$. Действительно, ввиду конечномерности $\mathfrak{R}_\alpha \subset \mathfrak{R}'_\alpha$ существует конечное число функций $f_i(z) = f_{g_i}(z)$, образующих базис в \mathfrak{R}_α , и оператор T_g определяется для всех элементов g таких, что все произведения gg_i достаточно близки к единице:

$$T_g f_{g_i} = f_{gg_i}.$$

Следовательно, в \mathfrak{X}_α определено представление локальной группы Ли, соответствующей группе G . Ввиду односвязности G это представление однозначно продолжается на всю группу G . Следовательно, вектор l действительно является сигнатурой. Теорема доказана.

Теорема 4 доставляет замечательные следствия не только для описания неприводимых представлений более широкого класса групп Ли, но также и для изучения структуры самой группы G .

Следствие 1. Пусть G — односвязная полуправильная комплексная группа Ли. Тогда для каждого корня ω в группе G существует односвязная подгруппа Ли G^ω с алгеброй Ли $\theta^\omega = \{e_{-\omega}, \omega, e_\omega\}$.

Действительно, если корень ω простой, то группа G^ω , построенная в § 110, должна быть изоморфна $SL(2)$ (в противном случае проекция l_ω оказалась бы четной). Поскольку всякий корень ω может быть сделан простым относительно некоторого упорядочения (§ 105), то наше утверждение верно для любого ω .

Следствие 2. Пусть G — односвязная полуправильная комплексная группа Ли. Тогда ее картановская подгруппа D разлагается в прямое произведение

$$D = D_1 D_2 \dots D_r$$

однопараметрических замкнутых подгрупп $D_i = \{\exp t \tilde{\omega}_i\}$, $\tilde{\omega} = 2\omega/(\omega, \omega)$, где $0 \leq \operatorname{Im} t < 2\pi$. Полагая $\delta = \exp t^i \tilde{\omega}_i$, $0 \leq \operatorname{Im} t^i < 2\pi$, получаем однозначную параметризацию группы D .

Действительно группа D_i является подгруппой Картина в G^{ω_i} , и потому ее параметр t^i должен нормироваться условием $0 \leq \operatorname{Im} t^i \leq 2\pi$. Разложение $D = D_1 D_2 \dots D_r$ вытекает из связности D и перестановочности подгрупп D_i ; очевидно также, что $D_i \cap D_j = \{e\}$ при $i \neq j$. Это следствие может быть также записано следующим образом:

Следствие 3. В группе D существуют мультипликативные координаты $\lambda_i = \exp t^i$. Всякий комплексно-аналитический характер группы D записывается в этих координатах следующим образом: $\chi(\delta) = \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_r^{n_r}$, где n_1, n_2, \dots, n_r — целые числа.

Перейдем теперь к рассмотрению редуктивных групп Ли. Если G — односвязная комплексная редуктивная группа Ли, то, очевидно, G разлагается в прямое произведение $G'C$, где G' — полупростая связная подгруппа и C — связная компонента единицы в центре группы G^*). Поскольку C является комплексной оболочкой тора, то в C существуют некоторые мультиликативные координаты $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_m$. Отсюда получаем

Следствие 4. *Если G — односвязная комплексная редуктивная группа Ли, то всякий ее старший вес имеет вид $\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \dots \lambda_m^{n_m}$, где числа n_i являются целыми неотрицательными при $i = 1, 2, \dots, r$ и произвольными целыми при $i = r + 1, r + 2, \dots, m$.*

Переход к неодносвязной группе осуществляется, как обычно, путем факторизации по центральному нормальному делителю. Поскольку этот делитель N содержится в D , то представление $d(\alpha)$ оказывается однозначным на G/N тогда и только тогда, когда характер $\alpha(\delta)$ обращается в единицу на N . Особенно просто решается этот вопрос в случае полупростой комплексной группы (см. § 118).

Следствие 5. *Если G — полупростая комплексная односвязная группа Ли, то полугруппа ее неприводимых представлений имеет ровно r образующих $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_r$ (где r — ранг группы G). Всякое представление $d(\alpha)$ однозначно записывается в виде*

$$d(\alpha) = \mathbf{d}_1^{l_1} \mathbf{d}_2^{l_2} \dots \mathbf{d}_r^{l_r},$$

где l_1, l_2, \dots, l_r — числовые отметки сигнатуры (под умножением имеется в виду произведение Юнга). Если G редуктивна, то к образующим $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_r$ добавляются еще $2(m - r)$ образующих $\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_i^{-1}$, $i = r + 1, \dots, m$ (в обозначениях следствия 4).

Далее, рассмотрим вещественные неприводимые представления группы G . Очевидно, всякий веществен-

*) Это утверждение следует из аналогичного разложения в классе алгебр Ли, односвязности $G'C$ и однозначности односвязной группы Ли с данной алгеброй Ли.

ный характер $\alpha(\delta)$ группы G может быть записан в виде

$$\alpha(\delta) = \prod_{i=1}^m \lambda_i^{l_i} \bar{\lambda}_i^{k_i},$$

где l_i, k_i — комплексные числа, для которых, однако, разности $l_i - k_i$ должны быть целыми. Как и прежде, условимся считать, что параметры $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ относятся к полупростой компоненте (остальные — к центру группы G).

Следствие 6. *Вещественный характер $\alpha(\delta)$ индуктивен тогда и только тогда, когда индуктивны отдельно его аналитический и антианалитический сомножители, т. е. когда l_i, k_i — целые числа, неотрицательные при $i = 1, 2, \dots, r$. Представление $d(\alpha)$ является тензорным произведением аналитического и антианалитического неприводимых представлений.*

Подчеркнем, что в этом следствии речь идет об односвязной группе G . В общем случае следствие 6 в основном сохраняет силу, но аналитический и антианалитический сомножители могут быть неоднозначны (даже если $\alpha(\delta)$ однозначно, см. § 43). Наконец, уточним описание канонической модели.

Теорема 5. *Пусть G — односвязная комплексная редуктивная группа Ли и α — ее старший вес. Тогда пространство \mathfrak{R}_α , в котором действует неприводимое представление $d(\alpha)$, состоит из всех решений индикаторной системы*

$$\mathcal{D}_i^{l_i+1} f(z) = 0, \quad \bar{\mathcal{D}}_i^{k_i+1} f(z) = 0.$$

Здесь $l_i, k_i, i = 1, 2, \dots, r$, — неотрицательные целые числа такие же, как в следствии 6. Пространство \mathfrak{R}_α состоит из полиномов на группе Z . Тот же результат имеет место, если группа G неодносвязна (но представление $d(\alpha)$ может быть конечнозначным).

Доказательство ничем не отличается от частного случая $SL(n)$, рассмотренного в § 65 (стр. 291) *).

*) Действительно, мы уже знаем, что $\mathfrak{R}_\alpha \subset \mathfrak{R}'_\alpha$, где \mathfrak{R}'_α — конечномерное пространство всех решений индикаторной системы, инвариантное относительно T_g . Остается воспользоваться принципом полной приводимости и единственностью старшего вектора ($f_0(z) \equiv 1$).