§ 114. Ортогональная группа

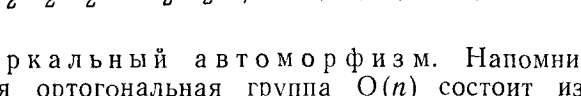
Перейдем к рассмотрению ортогональной группы $G = \mathrm{SO}(n, \boldsymbol{C})$ *). Эта группа связна и является связной компонентой единицы в группе линейных преобразований, сохраняющих симметрическую билинейную форму

$$(x, y) = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} y_2 + x_n y_1.$$

Мы естественно приходим к выбору этой формы, если желаем записывать разложение Гаусса с помощью треугольных матриц. Действительно, повторяя почти дословно рассуждения предыдущего параграфа, получаем, что разложение Гаусса в группе G индуцируется разложением Гаусса в объемлющей группе $\mathrm{GL}(n)$. В результате

$$G = \overline{Z_- D Z_+},$$

где компоненты Z_-, D, Z_+ определяются как пересечения группы G с подгруппами $\mathrm{Z}_-(n)$, $\mathrm{D}(n)$, $\mathrm{Z}_+(n)$. В дальнейшем мы будем отдельно рассматривать случай четной ($n = 2\nu$) и нечетной ($n = 2\nu + 1$) размерности. В обоих случаях ранг группы G равен ν и схема Дынкина имеет вид



Зеркальный автоморфизм. Напомним, что полная ортогональная группа $\mathrm{O}(n)$ состоит из двух связных листов: $\mathrm{O}^+(n)$, $\mathrm{O}^-(n)$, первый из которых совпадает с группой $G = \mathrm{SO}(n)$. Поскольку эта группа является нормальным делителем в $\mathrm{O}(n)$ (как связная компонента единицы), то $g_0 g g_0^{-1} \in G$ для всякой пары элементов $g \in G$, $g_0 \in \mathrm{O}(n)$. Положим, в частности,

$$\check{g} = \mathrm{o} g \mathrm{o}^{-1},$$

где матрица o определяется как перестановка базисных векторов с номерами ν, $\nu + 1$ в случае четного n ($n = 2\nu$).

*) Случай $n = 2$ исключается (в этом случае G абелева, т. е. не полупроста).

Переход от g к $\check{g}$ мы будем называть *зеркальным автоморфизмом* в группе G. Заметим, что $\mathrm{o} \in \mathrm{O}^-(n)$. В дальнейшем мы увидим, что зеркальный автоморфизм (при четном n) действительно является внешним, т. е. не сводится к внутреннему автоморфизму в $\mathrm{SO}(n)$. В схеме Дынкина этот автоморфизм осуществляет (при $n = 2\nu$) перестановку двух последних корней.

После этого (существенного) замечания перейдем к решению задачи об описании всех неприводимых представлений группы G.

I. Случай четного n, $n = 2\nu$. Рассуждая, как и в предыдущем параграфе, замечаем, что независимыми мультипликативными параметрами в картановской подгруппе D являются первые ν собственных значений матрицы $\delta \in D$. Вводя для этих параметров обозначения λ_1, λ_2, ..., λ_ν, положим

$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2} \ldots \lambda_\nu^{m_\nu}.$$

Как и в предыдущем параграфе, группа G содержит подгруппу G^0, изоморфную $\mathrm{GL}(\nu)$. Индуктивность характера $\alpha(\delta)$ по отношению к этой подгруппе приводит к ограничениям $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_\nu$. Следовательно, характер $\alpha(\delta)$ может быть также записан в виде

$$\alpha(\delta) = \Delta_1^{r_1}\Delta_2^{r_2} \ldots \Delta_\nu^{r_\nu},$$

где числа $r_i = m_i - m_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, неотрицательны и $r_\nu = m_\nu$. При этом Δ_p является диагональным минором матрицы δ, равным $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_p$. Заменяя Δ_p на $\Delta_p(g)$, где $\Delta_p(g)$ — соответствующий диагональный минор матрицы g, получаем производящую функцию $\alpha(g)$. Заметим теперь, что зеркальный автоморфизм сохраняет разложение Гаусса в группе G:

$$\check{Z}_- = Z_-, \quad \check{D} = D, \quad \check{Z}_+ = Z_+.$$

(Действительно, алгебра Ли группы G состоит из всех матриц, кососимметричных относительно второй диагонали, и отсюда легко получить, что зеркальный автоморфизм оставляет инвариантными алгебры Ли подгрупп Z_-, D, Z_+.) Отсюда мы получим существенное свойство симметрии в классе сигнатур.

Каждому представлению T_g группы G поставим в соответствие зеркально сопряженное представление $\check{T}_g = T_{\check{g}}$. Это представление действует в том же пространстве, что и T_g. Если ξ — старший вектор представления T_g, то мы имеем

$$\check{T}_z\xi = T_{\check{z}}\xi = \xi, \quad \check{T}_\delta\xi = T_{\check{\delta}}\xi = \alpha(\check{\delta})\,\xi.$$

Следовательно, вектор ξ является также старшим относительно $\check{T}_g$. При этом представление $\check{T}_g$ имеет старший вес $\check{\alpha}(\delta) = \alpha(\check{\delta})$. Поскольку для матрицы δ преобразование $\check{\delta}$ сводится к замене собственных значений λ_ν, λ_ν^{-1}, то мы имеем

$$\check{\alpha}(\delta) = \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_{\nu-1}^{m_{\nu-1}} \cdot \lambda_\nu^{-m_\nu}.$$

Отсюда заключаем, что если вектор $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$ является сигнатурой, то вектор $\check{\alpha} = (m_1, \ldots, m_{\nu-1}, -m_\nu)$ также является сигнатурой. Отсюда в свою очередь получаем добавочное ограничение на сигнатуру α: $m_{\nu-1} \geqslant -m_\nu$. Сопоставляя с найденными ранее ограничениями, получаем в результате

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_{\nu-1} \geqslant |m_\nu|.$$

Существование двузначных представлений. Покажем вначале, что отрицательные значения параметра m_ν действительно допустимы. Для этого заметим, что все диагональные миноры $\check{\Delta}_p$, $p = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, матрицы $\check{\delta}$ совпадают с соответствующими минорами Δ_p, в то время как

$$\check{\Delta}_\nu = \frac{\Delta_{\nu-1}^2}{\Delta_\nu}.$$

Поскольку зеркальный автоморфизм сохраняет разложение Гаусса, то эти же равенства сохраняются при замене Δ_p на $\Delta_p(g)$. Следовательно, $\Delta_{\nu-1}^2(g)$ делится без остатка на $\Delta_\nu(g)$. В дальнейшем мы условимся использовать обозначение Δ_p также для миноров матрицы g.

Введем в рассмотрение главные сдвиги на группе Z. Легко проверить, что образующими в алгебре Ли груп-

пы Z являются следующие матрицы:

$$f_p = \frac{1}{2}(e_{p,\,p+1} - e_{q-1,\,q}), \quad f_+ = \frac{1}{2}(e_{\nu-1,\,\nu+1} - e_{\nu,\,\nu+2}).$$

Здесь $p = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, $q = n - p + 1$. Условимся также использовать обозначение $f_- \equiv f_{\nu-1}$:

$$f_- = \frac{1}{2}(e_{\nu-1,\,\nu} - e_{\nu+1,\,\nu+2}).$$

При этом очевидно, что зеркальный автоморфизм переставляет векторы f_-, f_+. Пусть $\mathscr{D}_p$, $\mathscr{D}_-$, $\mathscr{D}_+$ — соответствующие главные сдвиги на группе Z.

Полагая $\Delta_p = \Delta_p(zg)$, $p = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, мы легко проверяем, что имеют место следующие тождества:

$$\mathscr{D}_p^{\varepsilon_{pi}+1}(\Delta_i) = 0, \text{ где } \varepsilon_{pi} = \begin{cases} 0 \text{ при } p \neq i, \\ 1 \text{ при } p = i. \end{cases}$$

Действительно, операторы $\mathscr{D}_p$ порождаются подгруппой G^0, изоморфной $\mathrm{GL}(\nu)$, и миноры Δ_p зависят только от центрального множителя g_0 в обобщенном разложении Гаусса:

$$g = n_- g_0 n_+, \qquad n_- \in N_-, \quad g_0 \in G^0, \quad n_+ \in N_+.$$

(Это разложение вполне аналогично бинарному разложению $\mathrm{Sp}(n)$, рассмотренному в предыдущем параграфе.) В частности, нас будет особенно интересовать следующее тождество:

$$\mathscr{D}_-^2\left(\frac{\Delta_{\nu-1}}{\sqrt{\Delta_\nu}}\right) = 0.$$

Действительно, минор Δ_ν является константой по отношению к дифференцированию $\mathscr{D}_- = \mathscr{D}_{\nu-1}$, и $\mathscr{D}_-^2(\Delta_{\nu-1}) = 0$. Применяя к этому тождеству зеркальный автоморфизм, мы получаем

$$\mathscr{D}_+^2(\sqrt{\Delta_\nu}) = 0.$$

В совокупности с равенствами $\mathscr{D}_p(\sqrt{\Delta_\nu}) = 0$, $p = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, это равенство означает, что характер $\alpha(\delta) = \sqrt{\Delta_\nu}$ является индуктивным по отношению к группе G. Действительно, функция $S_+ = \sqrt{\Delta_\nu}$ удовлет-

воряет индикаторной системе и потому является *полиномом* на группе Z.

Полученное представление мы обозначим s_+ и назовем *спинорным представлением первого рода.* Очевидно, это представление двузначно на группе G (т. е. является однозначным представлением универсальной накрывающей группы G).

С другой стороны, применяя к представлению s_+ зеркальный автоморфизм, получаем представление s_-, определяемое характером $\alpha(\delta)=\Delta_{\nu-1}/\sqrt{\Delta_\nu}$. Это представление назовем *спинорным представлением второго рода.*

Запишем теперь произвольный характер $\alpha(\delta)$ в виде

$$\alpha(\delta)=\Delta_1^{r_1}\Delta_2^{r_2}\ldots\Delta_{\nu-2}^{r_{\nu-2}}S_-^{r_-}S_+^{r_+},$$

где положено $S_-=\Delta_{\nu-1}/\sqrt{\Delta_\nu}$. Как легко проверить, показатели $m_{\nu-1}$, m_ν связаны с показателями r_-, r_+ следующими соотношениями:

$$r_+=m_{\nu-1}+m_\nu,\quad r_-=m_{\nu-1}-m_\nu.$$

Очевидно, соответствующая функция $\alpha(zg)$ удовлетворяет некоторой индикаторной системе тогда и только тогда, когда все показатели $r_1, r_2, \ldots, r_-, r_+$ являются целыми неотрицательными.

В результате доказана следующая

Теорема 7. *Всякое неприводимое представление группы* $SO(n)$ *при* $n=2\nu$ *однозначно определяется сигнатурой* $\alpha=(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, где $m_1\geqslant m_2\geqslant\ldots\geqslant m_{\nu-1}\geqslant\geqslant|m_\nu|$ *и числа* $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ *являются одновременно целыми или одновременно полуцелыми. Полугруппа неприводимых представлений имеет образующие* $\boldsymbol{d}_p$ *с сигнатурами*

$$\alpha_p=(\underbrace{1,\ 1,\ \ldots,\ 1}_{p},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

$p=1, 2, \ldots, \nu-2$, *и двузначные (спинорные) образующие* s_-, s_+ *с сигнатурами*

$$\alpha_-=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad \alpha_+=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Если использовать символику произведений Юнга, то всякое неприводимое представление $d(\alpha)$ с сигнату-

рой $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$ можно также записывать в виде

$$d(\alpha) = d_1^{r_1} d_2^{r_2} \ldots d_{\nu-2}^{r_{\nu-2}} s_-^{r_-} s_+^{r_+},$$

где положено $r_p = m_p - m_{p+1}$, $r_\pm = m_{\nu-1} \pm m_\nu$ и числа r_p, $r_\pm$ являются произвольными целыми неотрицательными. При этом иногда мы будем использовать символику $\alpha = \{r_1, r_2, \ldots, r_{\nu-2}; r_-, r_+\}$.

II. Случай нечетного n, $n = 2\nu + 1$. Этот случай мы можем получить редукцией из предыдущего, рассматривая $SO(n)$ как подгруппу в $SO(n+1)$, преобразования которой сохраняют $x_{\nu+1} + x_{\nu+2}$. Поскольку для диагональных матриц $\delta \in SO(n+1)$ последнее условие выполняется только при $\lambda_{\nu+1} = \lambda_{\nu+2} = 1$, то при сужении на $SO(n)$ мы получаем в качестве проекции характер

$$\alpha(\delta) = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \ldots \lambda_\nu^{m_\nu}, \qquad m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_\nu \geqslant 0.$$

При этом числа $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ должны быть одновременно целыми или одновременно полуцелыми. С другой стороны, нетрудно видеть, что других старших весов группа $SO(n)$ не имеет. Действительно, сужая на $SO(n)$ главные сдвиги группы $SO(n+1)$, получаем все главные сдвиги на $SO(n)$. Вводя обозначение $S_0 = \sqrt{\Delta_\nu}$, запишем характер $\alpha(\delta)$ в виде

$$\alpha(\delta) = \Delta_1^{r_1} \Delta_2^{r_2} \ldots \Delta_{\nu-1}^{r_{\nu-1}} S_0^{r_0}.$$

Тогда нетрудно видеть, что числа $r_1, r_2, \ldots, r_{\nu-1}, r_0$ являются произвольными целыми неотрицательными. Представление s_0 с характером S_0 является проекцией спинорных представлений s_-, s_+ группы $SO(n+1)$.

Представление s_0 мы называем *спинорным представлением группы* $SO(n)$ *при нечетном* $n = 2\nu + 1$.

Теорема 8. *Всякое неприводимое представление группы* $SO(n)$, $n = 2\nu + 1$, *однозначно определяется сигнатурой* $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_\nu \geqslant 0$, *где числа* $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ *являются одновременно*

целыми или одновременно полуцелыми. Сигнатуры

$$\alpha_p = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p}, 0, 0, \ldots, 0), \quad p = 1, 2, \ldots, \nu - 1,$$

$$\alpha_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$$

определяют систему образующих в полугруппе неприводимых представлений группы $SO(n)$. *При этом всякое представление* $d(\alpha)$ *с сигнатурой* α *может быть записано в виде произведения Юнга*:

$$d(\alpha) = \boldsymbol{d}_1^{r_1} \boldsymbol{d}_2^{r_2} \ldots \boldsymbol{d}_{\nu-1}^{r_{\nu-1}} \boldsymbol{s}_0^{r_0},$$

где числа $r_p = m_p - m_{p+1}$, $r_0 = 2m_\nu$ *произвольные целые неотрицательные.*

Замечание. Наряду с существованием двузначных представлений мы доказали приводимость некоторых диагональных миноров для ортогональной группы $SO(n)$. Действительно, при $n = 2\nu + 1$ имеем

$$\Delta_\nu = S_0^2.$$

Отсюда, между прочим, следует, что поливектор $\boldsymbol{d}_\nu$ содержится в тензорном произведении $\boldsymbol{s}_0 \otimes \boldsymbol{s}_0$ (см. замечание в § 109). Точно также при $n = 2\nu$ имеем

$$\Delta_{\nu-1} = S_- S_+, \quad \Delta_\nu = S_+^2.$$

В свою очередь доказательство приводимости этих миноров (как полиномов на Z при $\Delta_p = \Delta_p(zg)$) равносильно построению спинорных представлений.

Специально отметим частный случай $n = 4$. В этом случае всякое неприводимое представление имеет вид $\boldsymbol{s}_-^{r_-} \boldsymbol{s}_+^{r_+}$ и представления $\boldsymbol{s}_-$, $\boldsymbol{s}_+$ зеркально сопряжены. Как следует из схемы Дынкина, $SO(4)$ локально изоморфна квадрату группы Лоренца. Спинорные представления $\boldsymbol{s}_-$, $\boldsymbol{s}_+$ можно в этом случае рассматривать как однозначные представления группы Лоренца.

Итак, мы показали, в частности, что группа $G = SO(n)$ при любом значении n допускает двузначные представления. Покажем, что G двусвязна *) (случай $n = 2$ исключается).

*) То есть ее группа Пуанкаре состоит из двух элементов.

Действительно, положим $\mathfrak{G} = s_+$ при четном n и $\mathfrak{G} = s_0$ при нечетном n. Представления $s_-^r - s_+^r + \left(s_0^{r_0}\right)$ являются однозначными представлениями группы $\mathfrak{G}$ *). Поскольку $\mathfrak{G}$ накрывает G, то и все остальные представления $d(\alpha)$ также однозначны на $\mathfrak{G}$. Следовательно, $\mathfrak{G}$ односвязна. При этом $\mathfrak{G}$ двукратно накрывает группу G.

§ 115. Теория спиноров

В предыдущем параграфе было показано, что ортогональная группа $SO(n)$ двусвязна, и также была эффективно построена ее универсальная накрывающая $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}$ обозначается $\mathrm{Spin}(n)$ и называется *спинорной группой*. В этом параграфе приводится ее классическое построение и рассматриваются симметрические тензоры для этой группы (называемые *спинтензорами*).

Кроме того, в конце параграфа намечается еще одно элементарное доказательство существования спинорных представлений, основанное на общей формуле «канонической модели».

1° Спинорная группа. Выберем в n-мерном пространстве E базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ таким образом, чтобы скалярный квадрат вектора $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ задавался обычной формулой: $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Будем рассматривать символы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ как образующие некоторой ассоциативной алгебры $\mathfrak{K}$ с соотношениями

$$e_ie_j + e_je_i = 2\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. В частности, $e_ie_j = -e_je_i$, $j \neq i$, и $e_i^2 = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда скалярный квадрат (x, x) совпадает с квадратом элемента $x \in \mathfrak{K}$:

$$(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Алгебра $\mathfrak{K}$ называется *алгеброй Клиффорда*. Ниже мы укажем матричную реализацию алгебры $\mathfrak{K}$.

---

*) *Напомним, что s_-, s_+ зеркально сопряжены.*