

Действительно, положим $\mathfrak{G} = s_+$ при четном n и $\mathfrak{G} = s_0$ при нечетном n . Представления $s_-^r - s_+^r + (s_0^{r_0})$ являются однозначными представлениями группы \mathfrak{G}^*). Поскольку \mathfrak{G} накрывает G , то и все остальные представления $d(\alpha)$ также однозначны на \mathfrak{G} . Следовательно, \mathfrak{G} односвязна. При этом \mathfrak{G} двукратно накрывает группу G .

§ 115. Теория спиноров

В предыдущем параграфе было показано, что ортогональная группа $SO(n)$ двусвязна, и также была эффективно построена ее универсальная накрывающая \mathfrak{G} . Группа \mathfrak{G} обозначается $Spin(n)$ и называется *спинорной группой*. В этом параграфе приводится ее классическое построение и рассматриваются симметрические тензоры для этой группы (называемые *спинтензорами*).

Кроме того, в конце параграфа намечается еще одно элементарное доказательство существования спинорных представлений, основанное на общей формуле «канонической модели».

1° Спинорная группа. Выберем в n -мерном пространстве E базис e_1, e_2, \dots, e_n таким образом, чтобы скалярный квадрат вектора $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ задавался обычной формулой: $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Будем рассматривать символы e_1, e_2, \dots, e_n как образующие некоторой ассоциативной алгебры \mathfrak{K} с соотношениями

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. В частности, $e_i e_j = -e_j e_i$, $j \neq i$, и $e_i^2 = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда скалярный квадрат (x, x) совпадает с квадратом элемента $x \in \mathfrak{K}$:

$$(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Алгебра \mathfrak{K} называется *алгеброй Клиффорда*. Ниже мы укажем матричную реализацию алгебры \mathfrak{K} .

* Напомним, что s_- , s_+ зеркально сопряжены.

Рассмотрим теперь линейную оболочку X всех попарных произведений $e_i e_j = -e_j e_i$, $i \neq j$, и обозначим символом e_{ij} оператор коммутирования с элементом $e_i e_j$:

$$e_{ij}z = [e_i e_j, z].$$

Здесь z — произвольный элемент из алгебры Клиффорда и коммутатор $[a, b]$ означает $ab - ba$. Нетрудно проверить, что X является алгеброй Ли относительно этого коммутирования. Кроме того, мы имеем

$$e_{ij}e_k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, j \neq k, \\ 2e_i, & \text{если } j = k, \\ -2e_j, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что 1) пространство E инвариантно относительно алгебры X ; 2) операторы e_{ij} являются кососимметрическими в пространстве E ; 3) операторы e_{ij} образуют базис в алгебре всех кососимметрических операторов пространства E .

Пусть E_{ij} означает оператор e_{ij} , рассматриваемый только на пространстве E . Отображение $e_{ij} \rightarrow E_{ij}$ является точным линейным представлением алгебры X . Отсюда, в частности, заключаем, что алгебра X изоморфна $\text{so}(n)$.

Покажем теперь, что алгебра \mathfrak{K} имеет конечную размерность. Действительно, с помощью соотношений коммутации мы можем каждый одночлен от образующих e_i записывать в упорядоченном виде:

$$e_{i_1 i_2 \dots i_m} = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m}, \quad i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m.$$

Если $m > n$, то среди сомножителей в этом одночлене хотя бы один элемент e_i встречается дважды; поскольку $e_i^2 = 1$, то степень можно понизить. В результате остаются только те одночлены $e_{i_1 i_2 \dots i_m}$, для которых $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ и $0 \leq m \leq n$ ($e_0 = 1$). Число таких одночленов равно

$$\dim \mathfrak{K} = 1 + n + C_n^2 + \dots + C_n^m + \dots + 1 = 2^n.$$

Таким образом, алгебра Клиффорда имеет размерность 2^n .

Каждый элемент $a \in \mathfrak{K}$ мы можем рассматривать как линейный оператор $z \rightarrow az$, $z \in \mathfrak{K}$. С этой точки зрения a является матрицей $2^n \times 2^n$. Таким образом, алгебра \mathfrak{K} имеет точное матричное представление. (Действительно, если $az = bz$ для всех $z \in \mathfrak{K}$, то, в частности, $ae_0 = be_0$, откуда $a = b$.) Алгебру \mathfrak{K} мы будем теперь отождествлять с указанным матричным представлением.

В частности, алгебра $X \subset \mathfrak{K}$ получает точное матричное представление размерности $2^n \times 2^n$. Заметим, что линейное пространство \mathfrak{K} можно рассматривать как прямую сумму подпространств, составленных из всевозможных p -векторов над E , $p = 0, 1, 2, \dots, n$. Отсюда следует, что скалярное произведение из E продолжается на всю алгебру \mathfrak{K} так, что элементы из X остаются кососимметрическими. Согласно теореме 5 гл. V в группе $SO(2^n)$ существует связная подгруппа \mathfrak{G} с алгеброй Ли X . Мы полагаем $\mathfrak{G} = \text{Spin}(n)$.

Вернемся к n -мерному представлению алгебры X . Поскольку оно задается формулой $z \rightarrow [x, z]$, $x \in X$, $z \in E$, то соответствующее представление группы \mathfrak{G} задается формулой внутреннего дифференцирования:

$$z \rightarrow aza^{-1}, \quad a \in \mathfrak{G}.$$

Поскольку дифференциал такого представления состоит из кососимметрических матриц, то само представление ортогонально, т. е. матрицы представления содержатся в $SO(n)$. Мы получаем отображение группы $\text{Spin}(n)$ на группу $SO(n)$.

Упражнение

Сравнить с отображением $SL(2, \mathbf{C}) \rightarrow SO(3, \mathbf{C})$, построенным в § 11.

Поскольку отображение алгебры X является точным, то ядро отображения группы $\text{Spin}(n)$ дискретно. Нетрудно проверить, что оно состоит только из матриц $\pm e_0$. Таким образом, $\text{Spin}(n)$ является двукратным покрытием группы $SO(n)$.

З а м е ч а н и е 1. Предыдущее построение справедливо как над вещественным, так и над комплексным полем; соответствующая

спинорная группа обозначается $\text{Spin}(n, \mathbf{R})$ или $\text{Spin}(n, \mathbf{C})$. Для группы $\text{Spin}(n, \mathbf{R})$ мы укажем еще одну матричную реализацию, основанную на рассмотрении матриц Паули:

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Пусть 1 означает единичную матрицу 2×2 и $v = [n/2]$. Положим

$$e_i = \begin{cases} (\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3) \otimes \sigma_1 \otimes (1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) & \text{при нечетном } i, \\ (\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3) \otimes \sigma_2 \otimes (1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) & \text{при четном } i. \end{cases}$$

Здесь матрица σ_1 или σ_2 встречается на месте с номером $[i/2]$ и общее число сомножителей равняется v . (При n нечетном, $n = 2v + 1$, мы полагаем $e_n = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3$.) Нетрудно проверить, что матрицы e_i удовлетворяют нужным коммутационным соотношениям и косоэрмитовы.

Следовательно, группа $\text{Spin}(n, \mathbf{R})$ допускает также точное унитарное представление размерности 2^v , где $v = [n/2]$. Группа $\text{Spin}(n, \mathbf{C})$ является комплексификацией $\text{Spin}(n, \mathbf{R})$.

2° Спинтензоры. Вернемся теперь к стандартной методике построения неприводимых представлений. Метрический тензор мы выберем так же, как и в § 114. Положим $n = 2v$ и рассмотрим семейство сигнатур вида $\alpha = (m, m, \dots, m)$; соответствующее представление $d(\alpha)$ имеет вид

$$d(\alpha) = s_+^{2m},$$

т. е. является (в некотором смысле) симметрической степенью спинорного представления s_+ . Если m является целым числом, то представление $d(\alpha)$ может быть реализовано как представление, индуцированное одномерным представлением $A_{g_0} = (\det a)^m$ подгруппы G^0 , составленной из матриц

$$g_0 = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & \tilde{a}^{-1} \end{vmatrix}, \quad a \in \text{GL}(v).$$

Действительно, это утверждение является частным случаем теоремы 2. Для указания явной формулы представления мы вводим в группу G «бинарное разложение»:

$$g = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & 0 \\ \eta & e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & x \\ 0 & e \end{vmatrix} = n_- g_0 n_+,$$

где g_0 пробегает G^0 и η , x — произвольные матрицы $v \times v$, кососимметричные относительно второй диагонали. (Подобное разложение с симметрическими матрицами η , x мы рассматривали в § 113 для группы $Sp(n)$.) После несложных вычислений получаем следующую формулу:

$$T_g f(y) = (\lambda \det(e + y\eta))^m f((\alpha + y\gamma)^{-1}(\beta + y\delta)).$$

Здесь y — произвольная матрица $v \times v$, кососимметричная относительно второй диагонали, и $\lambda = \det a$. Согласно результатам § 114 эта формула сохраняет силу также и при полуцелом m . Пространство представления s_+^{2m} есть линейная оболочка всевозможных функций вида

$$f_\eta(y) = (\det(e + y\eta))^m.$$

В частности, мы видим, что спинорное представление s_+ может быть реализовано с помощью матричной «дробно-линейной подстановки» в линейной оболочке функций

$$f_\eta(y) = \sqrt{\det(e + y\eta)}. \quad (*)$$

Следовательно, все эти функции являются полиномами от элементов матрицы y .

Замечание 2. Если фундаментальный метрический тензор выбрать в виде

$$\sigma = \begin{vmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{vmatrix},$$

где e — единичная матрица $v \times v$, то матрицы η , y в формуле (*) становятся кососимметричными относительно главной диагонали.

Из полученной формулы вытекает возможность элементарного доказательства существования представления s_+ . Действительно, достаточно доказать, что для всякой пары кососимметрических матриц y , η функция (*) является полиномом.

Пример. Пусть $v = 3$. Положим

$$y = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 \\ -y_1 & 0 & y_3 \\ -y_2 & -y_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \eta = \begin{vmatrix} 0 & -\eta_1 & -\eta_2 \\ \eta_1 & 0 & -\eta_3 \\ \eta_2 & \eta_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда при помощи несложных вычислений получим

$$\det(e + y\eta) = (1 + y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + y_3\eta_3)^2.$$

Следовательно, в этом случае представление s_+ реализуется в четырехмерном пространстве, натянутом на базис $1, y_1, y_2, y_3$.

В общем случае в пространстве представления s_+ содержатся полиномы более высоких степеней.

Замечание 3. Поскольку s_- зеркально сопряжено s_+ , то нетрудно изучить также симметрические степени s_-^{2m} . Кроме того, в § 129 мы увидим, что

$$s_+|_{G_0} = s_-|_{G_0} = s_0$$

для подгруппы G_0 , изоморфной $\mathrm{SO}(n-1)$ (вложенной в $\mathrm{SO}(n)$, как указано в § 114). В частности, s_+ остается неприводимым при сужении на G_0 , и отсюда получаем также явную формулу для s_0 .

Продолжая редукцию с группы на подгруппу, мы покажем в гл. XVIII, что

$$\dim s_- = \dim s_+ = 2^{v-1}, \quad \dim s_0 = 2^v.$$

§ 116. Вещественные формы

В этой главе при изучении неприводимых представлений мы существенно пользовались принципом аналитического продолжения (действительно, при помощи этого принципа была изучена структура комплексных групп). Однако наиболее эффективным оказывается метод аналитического продолжения при изучении неприводимых представлений вещественных полупростых (редуктивных) групп Ли. Действительно, этот метод избавляет от необходимости исследовать структуру каждой вещественной формы в отдельности; все ее неприводимые представления уже содержатся в классе аналитических представлений комплексной оболочки.

Из общих результатов гл. VI непосредственно вытекает

Теорема 9. Пусть G — полупростая вещественная связная группа Ли и \mathfrak{G} — ее комплексная связная оболочка. Всякое неприводимое конечномерное представле-