Тогда при помощи несложных вычислений получим

$$\det(e + y\eta) = (1 + y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + y_3\eta_3)^2.$$

Следовательно, в этом случае представление s_+ реализуется в четырехмерном пространстве, натянутом на базис $1, y_1, y_2, y_3$.

В общем случае в пространстве представления s_+ содержатся полиномы более высоких степеней.

Замечание 3. Поскольку s_- зеркально сопряжено s_+, то нетрудно изучить также симметрические степени s_-^{2m}. Кроме того, в § 129 мы увидим, что

$$s_+|_{G_0} = s_-|_{G_0} = s_0$$

для подгруппы G_0, изоморфной $SO(n-1)$ (вложенной в $SO(n)$, как указано в § 114). В частности, s_+ остается неприводимым при сужении на G_0, и отсюда получаем также явную формулу для s_0.

Продолжая редукцию с группы на подгруппу, мы покажем в гл. XVIII, что

$$\dim s_- = \dim s_+ = 2^{\nu-1}, \quad \dim s_0 = 2^{\nu}.$$

§ 116. Вещественные формы

В этой главе при изучении неприводимых представлений мы существенно пользовались принципом аналитического продолжения (действительно, при помощи этого принципа была изучена структура комплексных групп). Однако наиболее эффективным оказывается метод аналитического продолжения при изучении неприводимых представлений вещественных полупростых (редуктивных) групп Ли. Действительно, этот метод избавляет от необходимости исследовать структуру каждой вещественной формы в отдельности; все ее неприводимые представления уже содержатся в классе аналитических представлений комплексной оболочки.

Из общих результатов гл. VI непосредственно вытекает

Теорема 9. *Пусть G — полупростая вещественная связная группа Ли и $\mathfrak{G}$ — ее комплексная связная оболочка. Всякое неприводимое конечномерное представле-*

ние группы G определяется однозначно (с точностью до эквивалентности) одной из сигнатур группы $\mathfrak{G}$ и может быть реализовано с помощью формулы

$$T_g f(z) = \alpha(z, g) f(z_g)$$

в классе полиномов $\mathfrak{R}_\alpha$ на корневой подгруппе $Z \subset \mathfrak{G}$. Здесь $\alpha(z, g)$ — производящая функция неприводимого представления $d(\alpha)$ и g является произвольным элементом из G. При этом, однако, следует рассматривать также неоднозначные представления группы $\mathfrak{G}$ (т. е. представления ее универсальной накрывающей).

Пример 1. $G = \mathrm{SO}(p, q)$. Преобразования группы G сохраняют вещественную квадратичную форму

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2.$$

Если группа G несвязна, то обозначим символом G^+ ее связную компоненту единицы. Если считать координаты x_k комплексными, то мы получаем комплексную связную группу $\mathfrak{G} = \mathrm{SO}(n, \boldsymbol{C})$, $n = p + q$. (Действительно, в комплексном поле допустима подстановка $x_k \to ix_k$, и фундаментальная форма превращается в сумму квадратов.) Отсюда легко заключить, что группа $\mathfrak{G}$ является комплексной оболочкой группы G. Следовательно, всякое неприводимое представление группы G^+ задается сигнатурой $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, $\nu = [n/2]$, причем

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_{\nu-1} \geqslant |m_\nu|, \quad \text{если } n = 2\nu,$$
$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_\nu \geqslant 0, \quad \text{если } n = 2\nu + 1,$$

и числа $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ являются одновременно целыми либо одновременно полуцелыми (в последнем случае получаем двузначные представления группы G^+).

Пример 2. $G = \mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{R})$. Комплексной оболочкой группы G является $\mathfrak{G} = \mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{C})$. Отсюда непосредственно вытекает, что всякое неприводимое представление группы G задается сигнатурой $(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, $\nu = n/2$ (n четно), причем

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_\nu \geqslant 0$$

и числа $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ являются целыми. Формула представления группы G получается из формулы представления группы $\mathfrak{G}$ сужением на G.

Пример 3. $G = \mathrm{Sp}\,\mathrm{U}(n)$. Группа G состоит из всех унитарных матриц $u \in \mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{C})$. Формулировка результата очевидна.

Примеры вещественных форм группы $\mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$ при $n = 2$ были рассмотрены в гл. V.

Замечание 1. Если группа G несвязна (как в примере 1), то ее неприводимые представления могут быть получены, например, при помощи теоремы Клиффорда ([10]).

Замечание 2. Вещественная форма может не иметь разложения Гаусса (например, $\mathrm{SO}(n, \boldsymbol{R})$). Максимальная диагональная подгруппа в линейной группе G может быть несвязной (например, в $\mathrm{SL}(n, \boldsymbol{R})$).

В статье [85] предложен еще один метод изучения неприводимых представлений вещественной группы G, не использующий аналитического продолжения. Этот метод основан на «обобщенном разложении Гаусса» *). Оказывается, что всякая вещественная связная полупростая (и также редуктивная) группа Ли может быть записана следующим образом:

$$G = \overline{N_- F N_+}.$$

Здесь N_-, N_+ — односвязные нильпотентные вещественные подгруппы, F — редуктивная подгруппа, которая локально изоморфна прямому произведению некоторой компактной подгруппы Q и односвязной абелевой подгруппы A; черта означает замыкание. При этом подгруппы N_-, N_+ являются инвариантными относительно F. Всякое неприводимое представление группы G задается формулой вида

$$T_g \varphi(n) = A_f \varphi(n_g),$$

где $\varphi(n)$ — вектор-функция на подгруппе $N = N_+$ и элементы f, n_g определяются из обобщенного разложения Гаусса $ng = \zeta f n_g$, $\zeta \in N_-$, $f \in F$, $n_g \in N_+$. Существенно, что этот метод применим даже в том случае, когда группа G не имеет точного линейного представления (§ 104) **).

---

*) См. стр. 451 для случая комплексной группы G.

**) И также в том случае, когда группа G не допускает комплексификации (см. замечание в конце § 104).

Если односвязная вещественная группа G не имеет точного линейного представления, то вместо нее удобно рассматривать так называемую *универсальную линейную группу*, введенную А. И. Мальцевым [111]. Оказывается, что в каждом классе $\omega(X)$ всех локально изоморфных групп Ли с полупростой алгеброй X всегда существует максимальная группа $\tilde{G}$, допускающая точное линейное представление. Группа $\tilde{G}$ накрывает всякую линейную группу из класса $\omega(X)$. Иначе говоря, если $G \in \omega(X)$, то всякое линейное представление группы G можно рассматривать также как представление $\tilde{G}$.

Линейная группа $\tilde{G}$ допускает комплексную оболочку $\tilde{\mathfrak{G}}$, и группа $\tilde{\mathfrak{G}}$ оказывается односвязной. Пусть $\mathfrak{U}$ — максимальная компактная подгруппа в $\mathfrak{G}$. Тогда, как мы знаем (§ 101), группа $\tilde{\mathfrak{U}}$ является связной и односвязной. В силу принципа аналитического продолжения мы можем заключить, что существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями всех трех групп $\tilde{G}$, $\tilde{\mathfrak{G}}$, $\tilde{\mathfrak{U}}$.

Таким образом, всякое неприводимое представление вещественной связной редуктивной группы Ли является в некотором смысле «компактно порожденным», т. е. вполне определяется структурой компактной группы $\tilde{\mathfrak{U}}$.

§ 117. Произвольные связные группы Ли

Если использовать теорему Леви — Мальцева, то результаты предыдущего параграфа могут быть перенесены на произвольную связную группу Ли (комплексную или вещественную). Решающим шагом при этом является следующая

Теорема 10. *Пусть G — вещественная связная группа Ли и S — ее полупростая (связная) компонента Леви. Тогда любое неприводимое представление группы G остается неприводимым при сужении на S.*

Доказательство. Пусть R — радикал группы G, т. е. максимальный связный разрешимый нормальный делитель. Тогда по теореме Ли в пространстве представления T_g группы G существует хотя бы один вектор