некоторой алгебры Ли X. (Согласно нашему определению разные алгебры Ли могут иметь один и тот же мультиплет.)

В данной главе мы подробно изучили мультиплеты типов A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 и G_2. Было показано, что каждый из этих мультиплетов задается некоторым набором числовых инвариантов, называемым *сигнатурой*. (В теоретической физике эти числовые инварианты называют иногда *квантовыми числами*.) Дискретность набора квантовых чисел связана, как мы видим, с «компактной природой» мультиплетов.

Результаты нашего исследования можно в терминах мультиплетов выразить следующим образом. *Все конечномерные мультиплеты произвольной связной группы Ли относятся к одному из классов $A_n - G_2$.*

§ 118. Несколько замечаний

В заключение этой главы остановимся вкратце на некоторых вопросах, опущенных в основном тексте.

1° Обобщение теоремы Вейля о полной приводимости. Чрезвычайно простой результат, даваемый теоремой 10, объясняется тем, что мы ограничились рассмотрением неприводимых представлений. Действительно, в классе разрешимых связных групп Ли такие представления попросту одномерны. Однако тот же пример разрешимой группы показывает, что может существовать чрезвычайно много «полуприводимых» представлений, устроенных по типу «жордановой клетки». Природа таких представлений, очевидно, всегда заключается в наличии радикала. Действительно, имеет место

Теорема 11. *Представление связной группы Ли вполне приводимо тогда и только тогда, когда вполне приводимо его сужение на радикал.*

За доказательством этой теоремы (хотя оно совсем несложно) мы отсылаем к статье [85], стр. 63. Заметим также, что в классе бесконечномерных представлений теряют силу как теорема 10, так и теорема 11. Действительно, разрешимые (и даже нильпотентные) группы имеют неприводимые бесконечномерные представления ([102]). С другой стороны, в классе бесконечномерных

представлений полупростой группы Ли теряет силу принцип полной приводимости. «Неразложимость» некоторых приводимых бесконечномерных представлений была впервые обнаружена автором на примере группы Лоренца (см. по этому поводу § 9 добавления I).

2° Различные реализации мультиплетов. Для группы $SL(n)$ мы рассматривали подробно различные реализации мультиплетов в классе полиномов и тензоров (гл. VII, гл. VIII). Все эти построения могут быть почти без изменений перенесены на произвольную полупростую комплексную связную группу G.

В частности, для группы G нетрудно построить реализацию $d(\alpha)$ на группе G, на подгруппе $\mathfrak{U}$ (где $\mathfrak{U}$ — максимальная компактная подгруппа в G)*). Последняя реализация задается следующей формулой:

$$T_g\varphi(u) = \alpha(\varepsilon')\varphi(u_g),$$

где элементы ε', u_g определяются из разложения Ивасавы: $ug = \varepsilon'\zeta u_g$, $\varepsilon' \in E$, $\zeta \in Z_-$, $u_g \in \mathfrak{U}$, где E — максимальная односвязная подгруппа в картановской подгруппе группы G. Такая реализация особенно удобна (см. добавление I, § 2) для перехода к бесконечномерным представлениям группы G.

Заметим, что переход от реализации на группе Z к реализации на группе $\mathfrak{U}$ осуществляется следующей формулой:

$$\varphi(u) = \alpha(u) f(z),$$

где матрицы $u \in \mathfrak{U}$, $z \in Z$ связаны разложением Ивасавы: $z = \varepsilon\zeta u$, $\varepsilon \in E$, $\zeta \in Z_-$. Для вычисления функции $\alpha(u)$ заметим, что $zz^* = \varepsilon\zeta\zeta^*\varepsilon$, откуда $\alpha(zz^*) = \alpha(\varepsilon)^2$. Далее, $\alpha(u) = \alpha(\zeta^{-1}\varepsilon^{-1}z) = \alpha(\varepsilon)^{-1}$. В результате

$$\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(zz^*)}}.$$

Эта формула в свою очередь может быть использована для обратного перехода от реализации на группе $\mathfrak{U}$ к реализации на группе Z. Далее, если $z = \varepsilon\zeta u$, то, как

*) Относительно реализации в классе тензоров для $SO(n)$, $Sp(n)$ см. также [10].

нетрудно показать, меры Хаара на Z и на $\mathfrak{U}$ связаны следующим соотношением:

$$du = |\beta(u)|^2 dz.$$

Здесь $\beta(g) = \beta(\zeta\delta z) = \beta(\delta)$, и $\beta(\delta)$ — характер картановской подгруппы D, сигнатура которого является суммой всех положительных корней группы G. Если для функций $\varphi(u)$ рассматривать метрику $L^2(\mathfrak{U})$, то для функций $f(z)$ мы получаем метрику, определяемую нормой *):

$$\|f\|^2 = \int |f(z)|^2 \frac{dz}{\alpha(zz^*)\beta(zz^*)}.$$

Соответственно вводится скалярное произведение в классе функций на группе Z. Это скалярное произведение обладает тем замечательным свойством, что по отношению к нему сужение $d(\alpha)|_{\mathfrak{U}}$ унитарно. (Действительно, то же верно в $L^2(\mathfrak{U})$.)

Пример. $G = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$. Ортогонализация треугольной матрицы $z \in Z$, очевидно, должна иметь следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \varepsilon\zeta \begin{Vmatrix} (1+|z|^2)^{-1/2} & z(1+|z|^2)^{-1/2} \\ \cdots & \cdots \end{Vmatrix},$$

где многоточием обозначены те члены, которые вполне определяются из унитарности последнего множителя. Используя параметры для группы $\mathrm{SU}(2)$, введенные в § 38, мы находим

$$t = \frac{1}{1+|z|^2}, \quad dt = \frac{2|z|\,d|z|}{(1+|z|^2)^2}.$$

Полагая $dz = dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$, где $\rho = |z|$, получаем меру Хаара на комплексной плоскости Z. В результате

$$du = \frac{c_0}{(1+|z|^2)^2} dz,$$

где множитель c_0 подбирается в зависимости от нормировки мер Хаара на $\mathfrak{U}$ и Z. Скалярный квадрат функ-

*) Действительно, $|\varphi(u)|^2 du = |f(z)|^2 |\alpha(u)|^2 |\beta(u)|^2 dz$.

ции $f(z)$ задается формулой

$$\|f\|^2 = \int |f(z)|^2 \frac{dz}{(1+|z|^2)^{m+2}},$$

где m — показатель характера $\alpha(\delta) = \delta_1^m$ (сигнатура этого характера имеет вид $(m, 0)$). Действительно,

$$zz^* = \begin{Vmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \bar{z} & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+|z|^2 & z \\ \bar{z} & 1 \end{Vmatrix}$$

и $\alpha(zz^*) = (1+|z|^2)^m$. В то же время сигнатура характера β имеет вид $(1, -1) \sim (2, 0)$, т. е. $\beta(\delta) = \delta_1\delta_2^{-1} = \delta_1^2$.

3° Общий метод отыскания центра. Существует простой общий метод отыскания центра односвязной полупростой комплексной группы G. Как мы видели в § 112, картановская подгруппа $D \subset G$ параметризуется следующим образом:

$$\delta = \exp 2\pi i(\varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2 + \ldots + \varphi_r h_r),$$

где $0 \leqslant \operatorname{Re}\varphi_k < 1$, $h_k = 2\omega_k/(\omega_k, \omega_k)$; ω_k — простой корень, $k = 1, 2, \ldots, r$. Искомый центр C содержится в подгруппе D и является ядром присоединенного представления группы G. Если H_α — оператор присоединенного представления, отвечающий вектору $2\alpha/(\alpha, \alpha)$, то мы имеем

$$H_\alpha e_\beta = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} e_\beta.$$

Достаточно рассматривать только простые корни α, β, так как все остальные собственные значения определяются по ним однозначно. Для отыскания центра C достаточно найти все значения параметров φ_k, $0 \leqslant \operatorname{Re}\varphi_k < 1$, для которых оператор $T_\delta = \exp 2\pi i(\varphi_1 H + \varphi_2 H_2 + \ldots + \varphi_r H_r)$, где $H_i = H_{\omega_i}$, обращается в единицу на векторах ω_j, $j = 1, 2, \ldots, r$. В результате получаем систему уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i c_{ij} \equiv 0 \pmod N,$$

где $c_{ij} = 2(\omega_i, \omega_j)/(\omega_i, \omega_i)$ — структурная матрица Картана и N означает аддитивную группу всех целых чисел. Исследуя такую систему, получаем ([85]), что число линейно независимых решений $(0 \leqslant \operatorname{Re}\varphi_k < 1)$ в точности равно детерминанту структурной матрицы Картана $\mathfrak{C} = \| c_{ij} \|_{i,\ j=1,\ 2,\ldots,\ r}$. Очевидно также, что все эти решения вещественны. (Действительно, матрица $\mathfrak{C}$ вещественна и $\det \mathfrak{C} \neq 0$, откуда следует, что числа $\operatorname{Im}\varphi_k$ удовлетворяют однородному уравнению с невырожденной матрицей коэффициентов.) Это еще раз показывает, что C содержится в максимальном торе $\Gamma \subset D$. В результате получаем, что имеет место

Теорема 12. *Пусть G — односвязная комплексная полупростая группа Ли и C — ее центр. Тогда порядок C равняется детерминанту структурной матрицы Картана. Группа C является циклической всегда, за исключением случая $G = \operatorname{Spin}(2m)$, когда эта группа изоморфна $Z_2 \times Z_2$.*

Более подробное доказательство см. в [81], [85]. Вычисляя центр для каждой простой односвязной группы Ли, получаем следующую таблицу:

Алгебра	A_n	B_n	C_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$\det \mathfrak{C}$	$n+1$	2	2	4	3	2	1	1	1
$N(\omega)$	$c(n+1)$	2	2	4	2	2	1	1	1

Здесь $N(\omega)$ означает число неизоморфных групп в классе $\omega(X)$ всех связных групп Ли с данной алгеброй Ли X, а $c(p)$ — число различных делителей целого числа p, включая 1 и p. (Действительно, $c(p)$ есть число различных подгрупп в циклической группе Z_p.) Классические линейные группы, разумеется, могут быть рассмотрены и независимо (хотя приведенное рассуждение доставляет новое доказательство односвязности $\mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{C})$, $\mathrm{Spin}(n, \boldsymbol{C})$). Для особых групп Картана получаем следующие элементы центра в канонических ко-

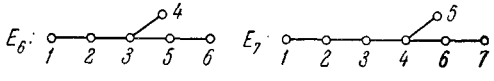
ординатах φ_k:

$$E_6\colon\ e,\ a,\ b,\ \text{где } a=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),$$

$$b=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

$$E_7\colon\ e,\ a,\qquad \text{где } a=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ 0\right).$$

Нумерация базиса определяется при этом следующей нумерацией простых корней:



В то же время мы видим, что алгебрам Ли E_8, F_4, G_2 отвечает лишь единственная (с точностью до изоморфизма) связная группа Ли.

Упражнения

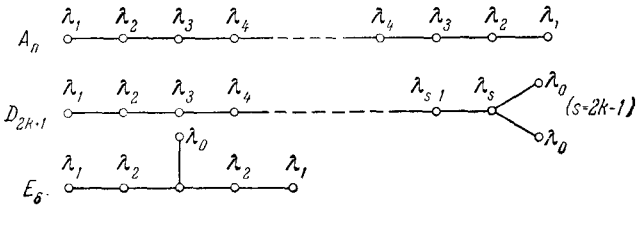
1. Сформулировать результат классификации неприводимых представлений компактной группы G в «инвариантных» терминах, не зависящих от выбора картановской подгруппы.

2. Пусть s_0 — преобразование из группы Вейля, переводящее все положительные корни в отрицательные. Показать, что операция

$$\hat{l}=-s_0 l$$

переводит сигнатуру l в сигнатуру $\hat{l}$, отвечающую контрагредиентному представлению группы G. Выписать условия контрагредиентности для алгебр Ли A_n, B_n, C_n, D_n.

3. Показать, что все неприводимые представления алгебр Ли B_n, C_n, D_{2k}, E_7, E_8, F_4, G_2 самоконтрагредиентны. Показать, что условием самоконтрагредиентности для A_n, D_{2k+1}, E_6 является следующее симметричное расположение числовых отметок на схеме Дынкина:



* * *

Содержание этой главы в основном соответствует статье [85] (см. также [83]). Основным результатом является не только вложение неприводимого представления $d(\alpha)$ в класс полиномов на группе Z (теорема 1), но, главным образом, описание индикаторной системы, т. е. описание класса полиномов, в котором действует $d(\alpha)$ (теорема 5). «Каноническая модель» $d(\alpha)$, получаемая таким образом, универсальна в том отношении, что она описывает все представления не только самой группы G, но также и ее универсальной накрывающей.

Спинорные представления группы $SO(n)$ были впервые открыты Э. Картаном (см. [25]). Все представления полупростой комплексной алгебры Ли были также впервые классифицированы Э. Картаном [94]. См. по этому поводу замечания к следующей главе.

Глобальная теория, изложенная в этой главе, представляет интерес еще и в том отношении, что она совершенно элементарно может быть построена для классических групп Ли. Этим вопросам посвящается другая статья автора [84]. В частности, такой подход позволяет единообразно получить не только тензорные, но также спинорные и спинтензорные представления.

В § 117 мы показываем, как при помощи теоремы Леви — Мальцева получить обобщение всех этих результатов на произвольную связную группу Ли. Такое обобщение может показаться несколько неожиданным, но оно вполне объясняется тем, что действие радикала, по существу, тривиально (теорема 10). Доказательство этой теоремы основано на той же идее, что и глобальное доказательство теоремы Ли, предложенное Р. Годеманом (§ 88); инфинитезимальное доказательство здесь, по-видимому, было бы значительно сложней. Из теоремы 10 естественно вытекает также теорема 11, которая является обобщением теоремы Вейля о полной приводимости.

Описание центра полупростой односвязной комплексной группы Ли является хорошо известным результатом ([81], [128]). Здесь приводится формулировка, включающая детерминант матрицы Картана ([85]).