матрицу Картана). Элементы h_i, e_i, f_i (и даже e_i, f_i) являются образующими во всей алгебре X. Эти образующие мы будем называть *каноническими*.

Заметим, что элементы f_i (e_i) являются образующими в ассоциативной алгебре $\mathfrak{X}_-$ ($\mathfrak{X}_+$). Кроме того, элементы h_i являются образующими в алгебре $\mathfrak{H}$.

Вещественную линейную оболочку всех векторов $h_i \in H$, $i = 1, 2, \ldots, r$, мы будем иногда обозначать символом H_0.

§ 120. Представления со старшим вектором

В этом параграфе будут исследованы представления алгебры X, не обязательно конечномерные, которые обладают следующими свойствами:

1° В пространстве представления существует вектор ξ, который аннулируется всеми преобразованиями подалгебры X_- и является собственным относительно подалгебры H.

2° Вектор ξ является циклическим в пространстве представления (т. е. все это пространство получается из ξ преобразованиями ассоциативной алгебры $\mathfrak{X}$).

Пусть V — пространство представления и $\rho(x)$ — оператор представления, отвечающий элементу $x \in \mathfrak{X}$. Тогда определение вектора ξ выглядит следующим образом:

$$\rho(e_i)\xi = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad \rho(h)\xi = \lambda(h)\xi, \quad h \in H.$$

Вектор ξ называется *старшим вектором*, и линейная форма $\lambda(h)$ — *старшим весом* данного представления. Числа $\lambda_i = \lambda(h_i)$ в этом определении могут быть произвольными комплексными.

Представление $\rho(x)$, обладающее свойствами 1° и 2°, мы будем называть *циклическим представлением со старшим весом* λ. Иногда такое представление называют также *представлением со старшим вектором*.

Теорема 2. *Пусть $\rho(x)$ — циклическое представление алгебры X со старшим весом λ. Тогда старший вектор определяется однозначно (с точностью до нормировки) и преобразования $\rho(h)$, $h \in H$, диагонализуются в пространстве представления. Всякий вес $\mu(h)$ подал-*

гебры H при этом имеет вид

$$\mu(h) = \lambda(h) - \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i(h),$$

где $\alpha_i(h) = (\alpha_i, h)$ — значение простого корня α_i на векторе h и n_i — неотрицательные целые числа. Каждый вес встречается в пространстве представления с конечной кратностью. Наконец, для каждой линейной формы $\lambda(h)$ над алгеброй H существует единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление со старшим весом λ.

Доказательство. Согласно свойству цикличности пространство V представления $\rho(x)$ может быть записано в виде

$$V = \mathfrak{X}\xi,$$

где символ $\mathfrak{X}\xi$ означает множество всех векторов вида $\rho(x)\xi$, $x \in \mathfrak{X}$. Согласно разложению Картана — Вейля мы получаем также

$$V = \mathfrak{X}_-\mathfrak{H}\mathfrak{X}_+\xi = \mathfrak{X}_-\xi,$$

поскольку $\mathfrak{X}_+\xi = \{\lambda\xi\}$ и $\mathfrak{H}\xi = \{\lambda\xi\}$. Иначе говоря, пространство V является циклическим также относительно подалгебры $\mathfrak{X}_-$.

Пусть f_i — канонические образующие в подалгебре $\mathfrak{X}_-$; тогда элементы вида $f_{i_1}f_{i_2}\ldots f_{i_m}$ образуют базис в $\mathfrak{X}_-$ (вместе с элементом $f_0 = 1$) и соответственно элементы вида

$$\xi_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \rho(f_{i_1}f_{i_2}\ldots f_{i_m})\xi$$

порождают пространство V. Очевидно, каждый такой элемент является весовым с весом

$$\mu = \lambda - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \ldots - \alpha_{i_m}.$$

Следовательно, операторы $\rho(h)$, $h \in H$, диагонализуются в пространстве V, и каждое собственное значение μ имеет конечную кратность (поскольку существует лишь конечное число одночленов от f_i с постоянной суммой $\beta = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \ldots + \alpha_{i_m}$). Первая часть теоремы доказана.

Далее, пусть λ — произвольная линейная форма на алгебре H и $\lambda_i = \lambda(h_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Определим пространство $\mathscr{Z}$ как свободную ассоциативную алгебру с единицей и с образующими $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Положим

$$\rho(h)\,1 = \lambda(h)\,1,$$

$$\rho(h) z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m} = \\ = \left(\lambda(h) - \alpha_{i_1}(h) - \alpha_{i_2}(h) - \ldots - \alpha_{i_m}(h)\right) z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m},$$

$$\rho(e_i)\,1 = 0, \quad \rho(f_i)\,1 = z_i,$$

$$\rho(f_i) z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m} = z_i z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m},$$

$$\rho(e_i) z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m} = z_{i_1} \rho(e_i) z_{i_2} \ldots z_{i_m} + \delta_{ii_1} \rho(h_i) z_{i_2} \ldots z_{i_m}.$$

В последнем соотношении мы исходим из равенства $\rho(e_i)\rho(f_j) = \rho(f_j)\rho(e_i) + \delta_{ij}\rho(h_i)$, которое должно выполняться для всякого представления алгебры X. Это соотношение позволяет определить оператор $\rho(e_i)$ индуктивно для всех одночленов $z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m}$. В результате, как легко проверить, мы получаем представление алгебры X во всем пространстве $\mathscr{Z}$.

Всякий одночлен $z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m}$ является весовым вектором относительно алгебры H с весом $\lambda - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \ldots - \alpha_{i_m}$. Следовательно, среди таких весов вес λ является старшим и содержится однократно в пространстве $\mathscr{Z}$. Кроме того, согласно определению оператора $\rho(f_i)$ вектор 1 является циклическим относительно алгебры $\mathfrak{X}_-$. Следовательно, $\rho(x)$ является циклическим представлением со старшим весом λ.

Пусть $\mathscr{Z}'$ — произвольное инвариантное подпространство в $\mathscr{Z}$ и $x = \sum x_\mu$ — разложение произвольного вектора $x \in \mathscr{Z}'$ по весовым векторам x_μ с различными весами μ. Принадлежность $x \in \mathscr{Z}'$ можно рассматривать как линейную зависимость $(\mathrm{mod}\,\mathscr{Z}')$. Поскольку векторы с различными весами не могут быть линейно зависимы, то $x_\mu \in \mathscr{Z}'$ при каждом μ. Следовательно, преобразова-

ния $\rho(h)$, $h \in H$, диагонализуются в $\mathscr{Z}'$ *). Пусть λ' — максимальный из весов, содержащихся в $\mathscr{Z}'$. Мы исключаем случай $\lambda' = \lambda$, когда $\mathscr{Z}' = \mathscr{Z}$. Следовательно, $\lambda' < \lambda$. Пусть $\mathscr{Z}^+$ — геометрическая сумма всех инвариантных подпространств с максимальными весами $\lambda' < \lambda$; тогда $\mathscr{Z}^+$ есть максимальное инвариантное подпространство в $\mathscr{Z}$, отличное от $\mathscr{Z}$. Следовательно, $\mathscr{Z}/\mathscr{Z}^+$ неприводимо. Мы доказали существование неприводимого представления со старшим весом λ.

Докажем теперь единственность такого представления. Пусть ρ_λ — неприводимое представление со старшим весом λ и старшим вектором ξ. Положим

$$\xi_{i_1 i_2 \ldots i_m} = \rho_\lambda(f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_m})\xi.$$

Тогда, как легко проверить, операторы $\rho_\lambda(x)$ действуют на векторы $\xi_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ по тем же формулам, что и операторы $\rho(x)$ в пространстве $\mathscr{Z}$ на векторы $z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m}$. Однако между $\xi_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ могут существовать нетривиальные линейные соотношения. Следовательно, пространство представления ρ_λ можно отождествить с фактор-пространством $\mathscr{Z}/\mathscr{Z}_0$, где $\mathscr{Z}_0$ — инвариантное подпространство, определяемое этими соотношениями **). Ввиду неприводимости ρ_λ, $\mathscr{Z}_0$ должно быть максимальным инвариантным подпространством, отличным от $\mathscr{Z}$. Но, как мы видели выше, такое подпространство определяется однозначно. Теорема доказана.

Замечание 1. Вместо свободной ассоциативной алгебры $\mathscr{Z}$ в доказательстве этой теоремы мы могли бы рассматривать алгебру $\tilde{\mathscr{Z}}$ с образующими $z_1, z_2, \ldots, z_r$, для которых выполняются соотношения

$$[z_i, z_j] = a_{ij}^k z_k,$$

---

*) Очевидно, это рассуждение справедливо для любого диагонального представления. В частности, в условиях теоремы 2 преобразования $\rho(h)$, $h \in H$, диагонализуются не только в пространстве V, но и в любом инвариантном подпространстве $V_0 \subset V$.

**) Подпространство $\mathscr{Z}_0$ состоит из тех линейных комбинаций базисных одночленов $z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m}$, которые обращаются в нуль при замене $z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_m}$ на $\xi_{i_1 i_2 \ldots i_m}$.

где числа a_{ij}^k определяются из соотношений коммутации для элементов e_i, e_k (или f_i, f_k). Алгебра $\mathfrak{Z}$ изоморфна, таким образом, алгебрам $\mathfrak{X}_-$ и $\mathfrak{X}_+$.

Замечание 2. Циклическое представление $\rho(x)$ со старшим весом λ может быть построено также при помощи левых сдвигов в алгебре $\mathfrak{X}$. Действительно, положим

$$\mathfrak{X}_\lambda = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{X}(h_i - \lambda_i) + \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{X} e_i.$$

Множество $\mathfrak{X}_\lambda$ является левым идеалом в $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}\mathfrak{X}_\lambda = \mathfrak{X}_\lambda$), и отсюда следует, что левые сдвиги в $\mathfrak{X}$ индуцируют некоторое представление в фактор-алгебре $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_\lambda = \mathfrak{Z}_\lambda$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{Z}_\lambda$ изоморфна алгебре $\mathfrak{Z}$ из предыдущего замечания и представление в $\mathfrak{Z}_\lambda$ задается теми же формулами, что и в $\mathfrak{Z}$.

§ 121. Классификация конечномерных неприводимых представлений алгебры X

В предыдущем параграфе мы получили классификацию всех неприводимых представлений алгебры X, обладающих старшими векторами и не обязательно конечномерных. Каждое такое представление определяется с точностью до эквивалентности своим старшим весом $\lambda = \lambda(h)$. Выясним, когда такое представление конечномерно.

1° *Если представление ρ_λ со старшим весом λ конечномерно, то числа $\lambda_i = \lambda(h_i)$ должны быть целыми неотрицательными.*

Доказательство. Если представление ρ_λ конечномерно, то циклическая оболочка старшего вектора ξ относительно трехчленной подалгебры $\theta_i = \{f_i, h_i, e_i\}$ также конечномерна *). Поскольку вектор ξ является старшим относительно θ_i, то проекция $\lambda_i = \lambda(h_i)$ должна быть целой неотрицательной.

2° *Если представление ρ_λ со старшим весом λ конечномерно, то множество всех его весов инвариантно относительно группы Вейля.*

---

*) Точнее говоря, мы имеем в виду циклическую оболочку относительно ассоциативной оболочки алгебры θ_i.