где числа a_{ij}^k определяются из соотношений коммутации для элементов e_i, e_k (или f_i, f_k). Алгебра $\mathfrak{Z}$ изоморфна, таким образом, алгебрам $\mathfrak{X}_-$ и $\mathfrak{X}_+$.

Замечание 2. Циклическое представление $\rho(x)$ со старшим весом λ может быть построено также при помощи левых сдвигов в алгебре $\mathfrak{X}$. Действительно, положим

$$\mathfrak{X}_\lambda = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{X}(h_i - \lambda_i) + \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{X} e_i.$$

Множество $\mathfrak{X}_\lambda$ является левым идеалом в $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}\mathfrak{X}_\lambda = \mathfrak{X}_\lambda$), и отсюда следует, что левые сдвиги в $\mathfrak{X}$ индуцируют некоторое представление в фактор-алгебре $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_\lambda = \mathfrak{Z}_\lambda$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{Z}_\lambda$ изоморфна алгебре $\mathfrak{Z}$ из предыдущего замечания и представление в $\mathfrak{Z}_\lambda$ задается теми же формулами, что и в $\mathfrak{Z}$.

§ 121. Классификация конечномерных неприводимых представлений алгебры X

В предыдущем параграфе мы получили классификацию всех неприводимых представлений алгебры X, обладающих старшими векторами и не обязательно конечномерных. Каждое такое представление определяется с точностью до эквивалентности своим старшим весом $\lambda = \lambda(h)$. Выясним, когда такое представление конечномерно.

1° *Если представление ρ_λ со старшим весом λ конечномерно, то числа $\lambda_i = \lambda(h_i)$ должны быть целыми неотрицательными.*

Доказательство. Если представление ρ_λ конечномерно, то циклическая оболочка старшего вектора ξ относительно трехчленной подалгебры $\theta_i = \{f_i, h_i, e_i\}$ также конечномерна *). Поскольку вектор ξ является старшим относительно θ_i, то проекция $\lambda_i = \lambda(h_i)$ должна быть целой неотрицательной.

2° *Если представление ρ_λ со старшим весом λ конечномерно, то множество всех его весов инвариантно относительно группы Вейля.*

---

*) Точнее говоря, мы имеем в виду циклическую оболочку относительно ассоциативной оболочки алгебры θ_i.

Доказательство. Пусть μ — произвольный вес представления ρ_λ. Положим

$$E_\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_{\mu+k\alpha}, \qquad \alpha = \alpha_i,$$

где V_ν означает подпространство всех весовых векторов веса ν. Тогда в действительности эта сумма является конечной и E_μ инвариантно относительно трехчленной алгебры $\theta_i = \{f_i, h_i, e_i\}$. Согласно теории представлений такой алгебры вместе с весом (μ, h_i) пространство E_μ должно содержать также вес $-(\mu, h_i)$ относительно элемента h_i. Следовательно, среди весов $\nu = \mu + k\alpha_i$ должен содержаться такой вес μ', что сумма $\mu + \mu'$ ортогональна корню α_i. Но тогда рефлексия s_i из группы Вейля переводит μ в μ':

$$s_i\mu = \mu'.$$

Следовательно, множество всех весов представления ρ_λ инвариантно относительно s_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, но тогда и относительно всей группы Вейля $\mathfrak{S}$.

Отбросим теперь условие конечномерности и взамен предположим, что числа $\lambda_i = \lambda(h_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, все являются целыми неотрицательными. Покажем, что попрежнему имеет место аналог утверждения 2°.

3° *Если числа $\lambda_i = \lambda(h_i)$ являются целыми неотрицательными, то множество всех весов представления ρ_λ инвариантно относительно группы Вейля.*

Доказательство. Пусть L_i — циклическая оболочка старшего вектора ξ относительно трехчленной подалгебры $\theta_i = \{f_i, h_i, e_i\}$. Поскольку $\lambda_i = \lambda(h_i)$ — целое неотрицательное число, то согласно результатам § 37 мы можем утверждать, что пространство L_i конечномерно и неприводимо.

Далее, пусть L — произвольное конечномерное подпространство, инвариантное относительно θ_i. Положим $\tilde{L} = XL$. Если $z \in \theta_i$, то мы имеем

$$\rho(z)\rho(x)\eta = \rho([z, x])\eta + \rho(x)\rho(z)\eta$$

для каждого вектора $\eta \in L$ и каждого элемента $x \in X$. Следовательно, $\tilde{L}$ также является конечномерным подпространством, инвариантным относительно θ_i.

Пусть W — линейная оболочка всех конечномерных подпространств, инвариантных относительно θ_i. Тогда мы видим, что W инвариантно относительно всей алгебры X. Поскольку W содержит L_i, то W содержит также и старший вектор ξ. Следовательно, $W = V$ ввиду неприводимости пространства V представления ρ_λ.

Рассмотрим теперь произвольный вес μ, и пусть η — весовой вектор веса μ. Согласно сказанному выше мы можем положить

$$\eta = \sum c_k \eta_k,$$

где каждый вектор η_k содержится в конечномерном подпространстве, инвариантном относительно θ_i. Следовательно, вектор η также содержится в одном из таких подпространств. Повторяя те же рассуждения, что и в доказательстве утверждения 2°, получаем, что вес $\mu' = s_i\mu$ содержится в пространстве V. Утверждение 3° доказано.

Теперь уже нетрудно получить окончательный результат:

Теорема 3. *Неприводимое представление ρ_λ со старшим весом λ конечномерно тогда и только тогда, когда все проекции $\lambda_i = \lambda(h_i)$ являются целыми неотрицательными. Множество всех весов в этом случае инвариантно относительно группы Вейля, и для каждого веса μ число $2(\mu, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ является целым, где α — корень.*

Доказательство. Согласно теореме 2 всякий вес представления ρ_λ имеет вид $\lambda - \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i$, где числа n_i неотрицательные целые. Если числа $\lambda_i = \lambda(h_i)$ вещественны, то это же верно для чисел $\mu_i = \mu(h_i)$; следовательно, в этом случае все веса представления ρ_λ содержатся в вещественном пространстве H_0 (вещественной линейной оболочке всех корней). Покажем, что при этом $(\mu, \mu) \leqslant (\lambda, \lambda)$.

Действительно, согласно 3° множество всех весов инвариантно относительно группы Вейля. Поскольку преобразования группы Вейля ортогональны, то они не изменяют скалярного квадрата (μ, μ). Согласно результатам § 105 мы можем подобрать преобразование Вей-

ля таким образом, чтобы полученный вектор был *доминантным*, т. е. числа $\mu_i = \mu(h_i)$ были неотрицательны. Тогда при $\beta = \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i$ имеем

$$(\mu, \beta) = \sum_{i=1}^{r} n_i (\mu, \alpha_i) \geqslant 0.$$

Следовательно, угол между векторами μ и β не может быть тупым. Но тогда скалярный квадрат вектора $\lambda = \mu + \beta$ не может быть меньше скалярного квадрата вектора μ. Наше утверждение доказано.

Пусть R — дискретная решетка всех векторов вида $\lambda - \sum_{i=1}^{r} n_i\alpha_i$, где числа n_i неотрицательные целые. Мы видим, что множество всех весов представления ρ_λ содержится в пересечении решетки R со сферой радиуса $\sqrt{(\lambda, \lambda)}$. Следовательно, это множество конечно. Поскольку

$$V = \sum_{\mu} V_\mu,$$

где V_μ — весовое подпространство с весом μ и $\dim V_\mu < \infty$ (теорема 2), то пространство V также конечномерно. Теорема доказана.

Поскольку каждое конечномерное представление алгебры содержит (в силу теоремы Ли) хотя бы один старший вектор, то теорема 3 дает нам полную классификацию всех неприводимых представлений алгебры X.

Замечание 1. Из доказательства пункта 2° нетрудно заключить, что подпространства V_μ, $V_{\mu'}$, где $\mu' = s_i\mu$, имеют одинаковую размерность. Следовательно, если ρ_λ конечномерно, то весовая диаграмма этого представления инвариантна относительно группы Вейля.

Замечание 2. Можно показать ([121]), что неприводимое конечномерное представление ρ_λ алгебры X может быть реализовано с помощью левых сдвигов в фактор-алгебре $\mathfrak{R}_\lambda = \mathfrak{X}/\mathfrak{M}_\lambda$, где $\mathfrak{M}_\lambda$ — максимальный левый идеал, определяемый следующим образом: $\mathfrak{M}_\lambda = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{X}e_i + \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{X}(h_i - \lambda_i) + \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{X}f_i^{\lambda_i+1}$ (ср. с замечанием 2

в § 120). Этот результат имеет очевидную аналогию с индикаторными системами, построенными в гл. XVI.

Замечание 3. Назовем представление алгебры X *экстремальным*, если в пространстве этого представления существует вектор ξ такой, что

$$\rho(e_\alpha)\xi = 0, \quad \rho(h)\xi = \lambda(h)\xi$$

для некоторой фундаментальной системы корней $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ (определение фундаментальной системы см. в § 105). Для экстремальных представлений, очевидно, имеет место аналог теоремы 2.

Конечномерное неприводимое представление экстремально относительно всякой фундаментальной системы корней (ввиду симметрии относительно группы Вейля). Более того, лишь конечномерные представления обладают этим свойством. Мы видим также, сколь «малую» часть занимают конечномерные представления в классе всех неприводимых (и даже в классе всех экстремальных) представлений алгебры X.

§ 122. Формула Фрейденталя

Начиная с этого параграфа, мы будем рассматривать только конечномерные представления. Займемся исследованием весовой диаграммы неприводимого представления ρ_λ. В этом параграфе будет установлена рекуррентная формула для кратностей весов в представлении ρ_λ, принадлежащая Фрейденталю.

Теорема 4. *Пусть n_μ — кратность веса μ в неприводимом представлении ρ_λ со старшим весом λ. Тогда*

$$n_\mu = \frac{2}{c(\mu)} \sum_{\alpha > 0} \sum_{k=1}^{\infty} n_{\mu + k\alpha}(\mu + k\alpha, \alpha).$$

Здесь каждый вес рассматривается как элемент из H и скобка (x, y) означает билинейную форму Киллинга — Картана. Множитель $c(\mu)$ отличен от нуля для каждого веса μ и вычисляется по формуле

$$c(\mu) = \|\lambda + \delta\|^2 - \|\mu + \delta\|^2,$$

где $\|x\| = (x, x)$ и δ означает полусумму всех положительных корней в алгебре X.