в § 120). Этот результат имеет очевидную аналогию с индикаторными системами, построенными в гл. XVI.

Замечание 3. Назовем представление алгебры X *экстремальным*, если в пространстве этого представления существует вектор ξ такой, что

$$\rho(e_\alpha)\xi = 0, \quad \rho(h)\xi = \lambda(h)\xi$$

для некоторой фундаментальной системы корней $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ (определение фундаментальной системы см. в § 105). Для экстремальных представлений, очевидно, имеет место аналог теоремы 2.

Конечномерное неприводимое представление экстремально относительно всякой фундаментальной системы корней (ввиду симметрии относительно группы Вейля). Более того, лишь конечномерные представления обладают этим свойством. Мы видим также, сколь «малую» часть занимают конечномерные представления в классе всех неприводимых (и даже в классе всех экстремальных) представлений алгебры X.

§ 122. Формула Фрейденталя

Начиная с этого параграфа, мы будем рассматривать только конечномерные представления. Займемся исследованием весовой диаграммы неприводимого представления ρ_λ. В этом параграфе будет установлена рекуррентная формула для кратностей весов в представлении ρ_λ, принадлежащая Фрейденталю.

Теорема 4. *Пусть n_μ — кратность веса μ в неприводимом представлении ρ_λ со старшим весом λ. Тогда*

$$n_\mu = \frac{2}{c(\mu)} \sum_{\alpha > 0} \sum_{k=1}^{\infty} n_{\mu + k\alpha}(\mu + k\alpha, \alpha).$$

Здесь каждый вес рассматривается как элемент из H и скобка (x, y) означает билинейную форму Киллинга — Картана. Множитель $c(\mu)$ отличен от нуля для каждого веса μ и вычисляется по формуле

$$c(\mu) = \|\lambda + \delta\|^2 - \|\mu + \delta\|^2,$$

где $\|x\| = (x, x)$ и δ означает полусумму всех положительных корней в алгебре X.

Доказательство этой теоремы основано на рассмотрении в ρ_λ квадратичного оператора Казимира

$$\Delta = \sum_{i=1}^{r} H_i H^i - \sum_{\alpha \neq 0} E_\alpha E_{-\alpha}.$$

Здесь положено $H_i = \rho_\lambda(h_i)$, $H^i = \rho_\lambda(h^i)$, $E_\alpha = \rho(e_\alpha)$, и базисные векторы h_i, e_α выбраны с таким расчетом, чтобы ковариантные числовые переменные образовывали квадратичный инвариант относительно присоединенного представления. Для этого, как обычно, достаточно положить

$$(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$$

и выбрать векторы h^i таким образом, чтобы они образовывали базис, дуальный к h_i, т. е. $(h_i, h^j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда, как нетрудно видеть, оператор Δ перестановочен со всеми операторами представления ρ_λ. Заметим, далее, что

$$\Delta\xi = \gamma\xi,$$

где собственное значение γ зависит от старшего веса λ. Поскольку Δ перестановочен со всеми понижающими операторами $\rho_\lambda(f_i)$, то $\Delta\eta = \gamma\eta$ для всякого вектора $\eta \in V$, где V — пространство представления ρ_λ. Следовательно, Δ является скаляром на V *). С другой стороны, положим

$$V = \sum_{\mu} V_\mu,$$

где V_μ означает весовое подпространство размерности n_μ, отвечающее весу μ. Очевидно, V_μ инвариантно относительно $E_\alpha E_{-\alpha}$. Вычисляя на этом подпространстве след оператора Δ, находим

$$\gamma n_\mu = n_\mu \sum_{i=1}^{r} \mu(h_i)\,\mu(h^i) - \sum_{\alpha \neq 0} \operatorname{sp} E_\alpha E_{-\alpha}.$$

Займемся вычислением отдельных слагаемых, входящих в правую часть.

---

*) Это можно получить также из леммы Шура. Однако проведенное рассуждение показывает, что Δ является скаляром для любого экстремального (не обязательно конечномерного) представления алгебры X.

1° Разлагая вес μ по базису h_i и дуальному базису h^i, находим $\mu = \sum_{i=1}^{r} \mu(h^i) h_i = \sum_{i=1}^{r} \mu(h_i) h^i$, откуда $(\mu, \mu) = \sum_{i=1}^{r} \mu(h_i)\mu(h^i)$. Следовательно, первая сумма в нашей формуле может быть заменена скалярным квадратом (μ, μ).

2° Фиксируем корень α и найдем выражение $\operatorname{sp} E_\alpha E_{-\alpha}$, где след берется только по весовому подпространству V_μ. Рассмотрим вначале тот случай, когда число

$$l_0 = \frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

является неотрицательным. Тогда l_0 является одним из возможных старших весов для трехчленной подалгебры операторов

$$E_- = \frac{E_{-\alpha}}{\sqrt{(\alpha, \alpha)/2}}, \quad E_0 = \frac{H_\alpha}{(\alpha, \alpha)}, \quad E_+ = \frac{E_\alpha}{\sqrt{(\alpha, \alpha)/2}},$$

где положено $H_\alpha = \rho_\lambda(\alpha)$. Кроме того, если $\xi \in V_\mu$, то ξ разлагается по базисным векторам с весами l_0, содержащимся в неприводимых подпространствах относительно $\{E_-, E_0, E_+\}$ со старшими весами l_0, $l_0 + 1$, $l_0 + 2, \ldots$ Следовательно,

$$n_\mu = \varkappa(l_0) + \varkappa(l_0 + 1) + \varkappa(l_0 + 2) + \ldots,$$

где $\varkappa(l)$ означает кратность вхождения старшего веса l в подпространство $\sum_{j=-\infty}^{\infty} V_{\mu + j\alpha}$. Отсюда также следует, что

$$\varkappa(l_0 + j) = n_{\mu + j\alpha} - n_{\mu + (j+1)\alpha}.$$

Теперь мы воспользуемся явными формулами для неприводимых представлений трехчленной подалгебры $\mathrm{sl}(2)$, найденными в § 37. Согласно этим формулам, если ξ является базисным вектором веса l_0 в неприводимом подпространстве со старшим весом l, то мы имеем

$$E_+ E_- \xi = (l + l_0)(l - l_0 + 1)\xi.$$

Полагая в этой формуле $l = l_0 + j$ и умножая каждое собственное значение на $\varkappa(l_0 + j)$, получаем вклад неприводимого подпространства со старшим весом l в сумму $\operatorname{sp} E_+E_-$. В результате

$$\operatorname{sp} E_+E_- = \sum_{j=0}^{\infty} (n_{\mu+j\alpha} - n_{\mu+(j+1)\alpha})(2l_0 + j)(j+1) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} n_{\mu+j\alpha}(2l_0 + j)(j+1) - \sum_{j=1}^{\infty} (2l_0 + j - 1)\, j n_{\mu+j\alpha}.$$

Вторая сумма не изменится, если распространить суммирование также на $j = 0$. Приводя подобные члены, получаем

$$\operatorname{sp} E_+E_- = 2\sum_{j=0}^{\infty} n_{\mu+j\alpha}(l_0 + j).$$

Если умножить теперь обе части полученного равенства на $-(\alpha, \alpha)/2$, то мы найдем искомую формулу для $\operatorname{sp} E_\alpha E_{-\alpha}$. Напомним, что $l_0 = (\mu, \alpha)/(\alpha, \alpha)$, откуда $(l_0 + j)(\alpha, \alpha) = (\mu + j\alpha, \alpha)$. В результате

$$\operatorname{sp} E_\alpha E_{-\alpha} = -\sum_{j=0}^{\infty} n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha). \qquad (*)$$

3° Рассмотрим теперь тот случай, когда $(\mu, \alpha) < 0$. Пусть $s = s_\alpha$ — отражение из группы Вейля по направлению корня α и $\mu' = s\mu$. Положим

$$l_0 = \frac{(\mu', \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -\frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

и заметим, что всякий вектор $\xi \in V_\mu$ имеет вес $-l_0$ относительно оператора E_0. Все предыдущие построения остаются в силе, если заменить μ на μ' и вес l_0 на вес $-l_0$. В результате получаем следующую формулу:

$$\operatorname{sp} E_\alpha E_{-\alpha} = -\sum_{j=1}^{\infty} n_{\mu'+j\alpha}(\mu' + j\alpha, \alpha), \qquad \mu' = s\mu,$$

где след по-прежнему берется только по весовому подпространству V_μ. Заметим, что $\mu' = \mu + m\alpha$, где $m = -2(\mu, \alpha)(\alpha, \alpha) > 0$. Следовательно, эта формула может

быть также записана в виде

$$\operatorname{sp} E_\alpha E_{-\alpha} = -\sum_{j=m+1}^{\infty} n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha).$$

Покажем, что суммирование можно распространить на значения μ от 0 до ∞. Действительно, если $i+j=m$, то сумма векторов $\mu + i\alpha$, $\mu + j\alpha$ ортогональна корню α и эти векторы сопряжены друг другу относительно рефлексии s. Поскольку в этом случае $n_{\mu+i\alpha} = n_{\mu+j\alpha}$ (весовая диаграмма инвариантна относительно группы Вейля), то мы имеем также

$$n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha) + n_{\mu+i\alpha}(\mu + i\alpha, \alpha) = 0.$$

Отсюда, очевидно, следует, что сумма слагаемых $n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha)$ по j от 0 до m обращается в нуль. Следовательно, формула (*) сохраняет силу для любого веса μ и любого корня $\alpha \neq 0$.

Суммируя результаты 1°, 2°, 3°, получаем следующее тождество:

$$\gamma n_\mu = n_\mu(\mu, \mu) + \sum_{\alpha\neq 0} \sum_{j=0}^{\infty} n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha). \qquad (**)$$

Преобразуем полученную формулу. Прежде всего, заметим, что слагаемые $n_\mu(\mu, \alpha)$, $n_\mu(\mu, -\alpha)$ взаимно уничтожаются, так что суммирование в (**) можно вести по j от 1 до ∞. Далее, из приведенных выше рассуждений относительно рефлексии s_α следует, что сумма слагаемых $n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha)$ по j от $-\infty$ до ∞ всегда обращается в нуль. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} n_{\mu-j\alpha}(\mu - j\alpha, \alpha) = n_\mu(\mu, \alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha).$$

Используя это тождество, мы можем исключить в формуле (*) все слагаемые с $\alpha < 0$. В результате имеем

$$\gamma n_\mu = n_\mu(\mu, \mu) + \sum_{\alpha>0} n_\mu(\mu, \alpha) + 2\sum_{\alpha>0} \sum_{j=1}^{\infty} n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha).$$

Если использовать обозначение $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$, то эта формула переписывается в виде

$$\gamma n_\mu = n_\mu(\mu,\ \mu+2\delta) + 2\sum_{\alpha>0}\sum_{j=1}^{\infty} n_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\ \alpha).$$

Наконец, для нахождения множителя γ достаточно в качестве μ взять старший вес λ. Тогда $n_\lambda = 1$, $n_{\lambda+j\alpha} = 0$ при $j > 0$, и мы находим, что $\gamma = (\lambda, \lambda+2\delta) = \|\lambda+\delta\|^2 - \|\delta\|^2$. Подставляя это выражение снова в общую формулу, получаем окончательно

$$(\|\lambda+\delta\|^2 - \|\mu+\delta\|^2)\, n_\mu = 2\sum_{\alpha>0}\sum_{j=1}^{\infty} n_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\ \alpha).$$

Осталось показать, что коэффициент при n_μ отличен от нуля. Для этого установим следующие два предложения, имеющие также самостоятельную ценность:

4° *Пусть δ — полусумма положительных корней. Тогда все числовые отметки вектора δ равны единице* *):

$$\delta_i = \delta(h_i) = \frac{2(\delta,\ \omega_i)}{(\omega_i,\ \omega_i)} = 1, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r.$$

Если s — элемент из группы Вейля, отличный от единицы, то $\delta > s\delta$ (относительно лексикографической упорядоченности в H).

Действительно, пусть s_i — отражение относительно простого корня α_i. Тогда, как мы видели в § 105, для каждого положительного корня $\alpha \neq \omega_i$ корень $s_i\alpha$ также положителен. Следовательно,

$$s_i\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} s_i\alpha = -\frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha\neq\alpha_i\\ \alpha>0}}\alpha = \delta - \alpha_i.$$

В то же время $s_i\delta = \delta - \delta_i\alpha_i$ согласно общей формуле для рефлексий. Следовательно, $\delta_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Аналогично, если s — произвольный элемент из группы Вейля, то

$$s\delta = \delta - \sum\alpha,$$

*) Иначе говоря, если h^i — базис, дуальный h_i, то все координаты вектора δ в этом базисе равны единице.

где сумма берется по тем $\alpha > 0$, для которых $s\alpha < 0$. Если таких α нет, то преобразование s сохраняет доминантную камеру Вейля, откуда $s = e$ (§ 105). Следовательно, $s\delta - \delta < 0$.

5° *Если* μ — *произвольный вес представления* ρ_λ, *отличный от старшего веса* λ, *то* $\|\mu + \delta\| < \|\lambda + \delta\|$.

Действительно, если $\mu \neq \lambda$, то $\mu < \lambda$, и мы имеем

$$\|\lambda + \delta\|^2 - \|\mu + \delta\|^2 = \|\lambda\|^2 - \|\mu\|^2 + 2(\lambda - \mu, \delta).$$

Как мы видели в § 121, $\|\lambda\| \geqslant \|\mu\|$. Далее, поскольку вектор $\lambda - \mu$ является линейной комбинацией простых корней с неотрицательными коэффициентами, не равными тождественно нулю, и $(\alpha_i, \delta) > 0$, то $\|\lambda + \delta\|^2 - \|\mu + \delta\|^2 > 0$. Теорема доказана.

Поскольку все веса в правой части формулы Фрейденталя выше μ (относительно лексикографической упорядоченности), то эта формула действительно позволяет найти все кратности n_μ, исходя из кратности $n_\lambda = 1$.

§ 123. Формула Вейля для характеров

В этом параграфе мы приводим чисто алгебраическое доказательство формулы Вейля, принадлежащее Фрейденталю, для характеров неприводимых конечномерных представлений алгебры X. Если встать на алгебраическую точку зрения, то характер χ представления ρ_λ может быть определен с помощью формулы

$$\chi = \sum_\mu n_\mu e(\mu),$$

где $e(\mu)$ — формальный символ, определенный в классе весов и удовлетворяющий мультипликативному соотношению

$$e(\lambda)\, e(\mu) = e(\lambda + \mu).$$

Иначе говоря, мы можем рассматривать χ как элемент ассоциативной алгебры с единицей $1 = e(0)$ и образующими $\gamma_i = e(h^i)$, $\gamma_i^{-1} = e(-h^i)$, где h^i — дуальные векторы для $h_i = 2\omega_i/(\omega_i, \omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Действительно, всякий вес имеет целые координаты в дуальном базисе h^i (каждая из этих координат является «числовой