где сумма берется по тем $\alpha > 0$, для которых $s\alpha < 0$. Если таких α нет, то преобразование s сохраняет доминантную камеру Вейля, откуда $s = e$ (§ 105). Следовательно, $s\delta - \delta < 0$.

5° *Если* μ — *произвольный вес представления* ρ_λ, *отличный от старшего веса* λ, *то* $\|\mu + \delta\| < \|\lambda + \delta\|$.

Действительно, если $\mu \neq \lambda$, то $\mu < \lambda$, и мы имеем

$$\|\lambda + \delta\|^2 - \|\mu + \delta\|^2 = \|\lambda\|^2 - \|\mu\|^2 + 2(\lambda - \mu, \delta).$$

Как мы видели в § 121, $\|\lambda\| \geqslant \|\mu\|$. Далее, поскольку вектор $\lambda - \mu$ является линейной комбинацией простых корней с неотрицательными коэффициентами, не равными тождественно нулю, и $(\alpha_i, \delta) > 0$, то $\|\lambda + \delta\|^2 - \|\mu + \delta\|^2 > 0$. Теорема доказана.

Поскольку все веса в правой части формулы Фрейденталя выше μ (относительно лексикографической упорядоченности), то эта формула действительно позволяет найти все кратности n_μ, исходя из кратности $n_\lambda = 1$.

§ 123. Формула Вейля для характеров

В этом параграфе мы приводим чисто алгебраическое доказательство формулы Вейля, принадлежащее Фрейденталю, для характеров неприводимых конечномерных представлений алгебры X. Если встать на алгебраическую точку зрения, то характер χ представления ρ_λ может быть определен с помощью формулы

$$\chi = \sum_\mu n_\mu e(\mu),$$

где $e(\mu)$ — формальный символ, определенный в классе весов и удовлетворяющий мультипликативному соотношению

$$e(\lambda)\, e(\mu) = e(\lambda + \mu).$$

Иначе говоря, мы можем рассматривать χ как элемент ассоциативной алгебры с единицей $1 = e(0)$ и образующими $\gamma_i = e(h^i)$, $\gamma_i^{-1} = e(-h^i)$, где h^i — дуальные векторы для $h_i = 2\omega_i/(\omega_i, \omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Действительно, всякий вес имеет целые координаты в дуальном базисе h^i (каждая из этих координат является «числовой

отметкой» (§ 109) на одном из простых корней ω_i). Над полем комплексных чисел мы можем также положить

$$e(\mu) = \exp(\mu, h),$$

где положено $\mu = \mu_i h^i$, $h = t^i h_i$ и $(\mu, h) = \mu_i t^i$. Однако алгебраическое определение удобно в том отношении, что «формальная экспонента» $e(\mu)$ может быть определена над произвольным полем.

Веса конечномерных представлений алгебры X мы будем также иногда называть *целочисленными векторами*. Заметим, что каждый корень является весом (весом присоединенного представления алгебры X). Положим

$$Q = \prod_{\alpha > 0} (e(\alpha/2) - e(-\alpha/2)).$$

Здесь мы нарушили предыдущие соглашения, поскольку $\alpha/2$, вообще говоря, не является весом. Однако нетрудно видеть, что определение элемента Q может быть также дано в следующей корректной форме:

$$Q = e(-\delta) \prod_{\alpha > 0} (e(\alpha) - 1) = e(\delta) \prod_{\alpha > 0} (1 - e(-\alpha)),$$

где δ — полусумма положительных корней. Первое определение обладает тем преимуществом, что из него непосредственно очевидна кососимметричность по отношению к группе Вейля. Действительно, положим

$$se(\mu) = e(s\mu)$$

для каждого s из группы Вейля $\mathfrak{S}$ и распространим определение оператора s по линейности на все линейные комбинации экспонент. Если $s = s_i$ — рефлексия по направлению простого корня ω_i, то оператор s меняет знак у скобки $e(\alpha_i/2) - e(-\alpha_i/2)$ и переставляет все остальные скобки между собой. Следовательно, $s_i Q = -Q$, и отсюда $sQ = (\det s) Q$ для всякого $s \in \mathfrak{S}$. Мы условимся записывать характер χ в виде отношения F/Q, т. е. вместо χ введем новую искомую функцию

$$F = \chi Q.$$

Из симметричности весовой диаграммы по отношению к группе Вейля следует симметричность характера χ. Из

симметричности χ и антисимметричности Q следует также антисимметричность F.

Лемма 1. $Q = \sum_{s \in \mathfrak{S}} (\det s) e(s\delta)$, *где* δ — *полусумма положительных корней.*

Доказательство. Рассмотрим вначале произвольную антисимметрическую функцию $f = \sum \xi_\mu e(\mu)$. Скажем, что функция f является *элементарной*, если веса, входящие в ее разложение, лежат на одной орбите относительно группы Вейля. В этом случае среди таких весов имеется лишь один доминантный вес μ_0 и все остальные веса получаются из него преобразованиями группы Вейля. Очевидно, в этом случае

$$f = c_0 A e(\mu_0), \qquad c_0 = \text{const},$$

где A означает оператор альтернирования: $A = \frac{1}{w} \sum_{s \in \mathfrak{S}} (\det s) s$ (w — порядок группы Вейля) *). Заметим, что оператор A удовлетворяет тождеству $As_i = -A$ для всякой рефлексии по направлению корня ω_i. Следовательно, если $\mu_0(h_i) = 0$ при некотором i, то $Ae(\mu_0) = As_i e(\mu_0) = -Ae(\mu_0)$, откуда следует, что в этом случае $f = 0$.

Вектор $\mu \in H$ мы условимся называть *строго доминантным*, если все его числовые отметки $\mu_i = \mu(h_i)$ положительны. В результате мы видим, что всякая элементарная функция определяется (с точностью до множителя) своим единственным строго доминантным весом μ_0. Очевидно также, что всякая кососимметрическая функция f является линейной комбинацией элементарных **).

Покажем теперь, что функция Q является элементарной. Действительно, все веса, входящие в разложение Q, имеют вид $\mu = \delta - \beta$, где β — сумма некоторых поло-

---

*) Действительно, $f = Af$ и $Ae(\mu) = \pm Ae(\mu_0)$ для каждого веса μ, лежащего на одной орбите с μ_0. Следовательно, f может отличаться лишь множителем от $Ae(\mu_0)$.

**) Для получения такого разложения достаточно выделить в сумме $f = \sum \xi_\mu e(\mu)$ все строго доминантные веса и применить к соответствующим функциям оператор альтернирования.

жительных корней. Если вектор μ является строго доминантным, то

$$\beta_i < \delta_i = 1$$

(числовые отметки вектора δ равны единице). Как следует из определения вектора β, его числовые отметки $\beta_i = 2(\beta, \omega_i)/(\omega_i, \omega_i)$ являются целыми. Следовательно, $\beta_i \leqslant 0$. С другой стороны, коэффициенты в разложении β по простым корням неотрицательны и отличаются лишь положительными множителями от дуальных координат $\beta^i = (\beta, h^i)$. Следовательно, $(\beta, \beta) = \beta_i\beta^i \leqslant 0$, откуда $\beta = 0$. Мы показали, что вектор δ является единственным строго доминантным среди весов в разложении Q. Разность $R = Q - \sum_{s \in \mathfrak{S}} (\det s)\, e(s\delta)$ кососимметрична и не содержит ни одного строго доминантного веса, откуда $R = 0$. Лемма доказана.

Пусть E — алгебра всех функций, которые являются линейными комбинациями экспонент, и $\boldsymbol{E}$ — множество всех вектор-функций $f = f^i h_i$, где $f^i \in E$ и h_i — фиксированный базис в картановской алгебре H. Мы определим отображения $E \to \boldsymbol{E}$ и $E \to E$, называемые соответственно *градиентом* и *лапласианом* в E:

$$\nabla e(\mu) = e(\mu)\,\mu, \qquad \Delta e(\mu) = (\mu, \mu)\, e(\mu),$$

с линейным продолжением на всю алгебру E. Из мультипликативного соотношения для экспонент $e(\mu)$ вытекает обычное правило дифференцирования $\nabla(ab) = (\nabla a)\, b + a(\nabla b)$ и соотношение

$$\Delta(ab) = (\Delta a)\, b + 2(\nabla a, \nabla b) + a(\Delta b),$$

где скалярное произведение двух элементов из $\boldsymbol{E}$ определяется так же, как и в картановской алгебре H, с заменой числовых коэффициентов коэффициентами из E. Докажем теперь еще одну лемму, которая является основной для нашего изложения.

Лемма 2. *Функция $F = \chi Q$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению*:

$$\Delta F = (\lambda + \delta, \lambda + \delta)\, F.$$

Доказательство. Используем формулу (**), полученную в предыдущем параграфе при доказательстве

формулы Фрейденталя. Умножая обе части этой формулы на экспоненту $e(\mu)$ и суммируя по μ, находим

$$\gamma\chi = \Delta\chi + \sum_{\mu} \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{j=0}^{\infty} n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha)\, e(\mu).$$

Умножим обе части этого равенства на функцию

$$P = \prod_{\alpha \neq 0} (e(\alpha) - 1) = \prod_{\alpha \neq 0} P_\alpha.$$

Заметим, что если фиксировать корень α и положить $P = R_\alpha P_\alpha$, где $R_\alpha = \prod_{\beta \neq \alpha} (e(\beta) - 1)$, то общий член под знаком тройной суммы принимает вид

$$R_\alpha n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha)(e(\mu + \alpha) - e(\mu)).$$

Суммируя по j от 0 до ∞, заметим, что суммарный коэффициент при экспоненте $e(\mu + \alpha)$ равен

$$R_\alpha \times \sum_{j=0}^{\infty} \{n_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha, \alpha) - n_{\mu+(j-1)\alpha}(\mu + (j-1)\alpha, \alpha)\} = \\ = R_\alpha n_\mu(\mu, \alpha).$$

Суммируя теперь по $\alpha \neq 0$, замечаем, что выражение $\sum_{\alpha \neq 0} R_\alpha \alpha e(\alpha)$ совпадает с градиентом функции P. С другой стороны, суммируя по μ, замечаем, что выражение $\sum_{\mu} n_\mu \mu e(\mu)$ совпадает с градиентом характера χ. В результате имеем

$$\gamma\chi \cdot P = (\Delta\chi) \cdot P + (\nabla\chi, \nabla P).$$

Из определения функций P, Q следует, что $P = \pm Q^2$. Следовательно, $\nabla P = \pm 2Q\nabla Q$, и скалярный множитель можно вынести за знак скалярного произведения. Сокращая на $\pm 2Q$, получаем следующее тождество:

$$\gamma\chi \cdot Q = (\Delta\chi)Q + 2(\nabla\chi, \nabla Q).$$

Согласно отмеченному выше общему правилу для лапласиана выражение в правой части есть $\Delta(\chi Q) - \chi(\Delta Q)$. Полагая $F = \chi Q$, находим

$$\gamma F = \Delta F - \chi \Delta Q.$$

Остается заметить, что $\Delta Q = (\delta, \delta) Q$ в силу леммы 1. Кроме того, в предыдущем параграфе было найдено следующее выражение для множителя γ: $\gamma = (\lambda+\delta, \lambda+\delta) - (\delta, \delta)$. Подставляя все эти выражения, получаем нужный результат. Лемма доказана.

Теперь уже нетрудно найти явный вид элемента F. Функция $F = \chi Q$ является линейной комбинацией экспонент $e(\mu + s\delta)$, где μ — произвольный вес представления ρ_λ и $s \in \mathfrak{S}$. Каждая из этих экспонент является собственным вектором лапласиана с собственным значением $(\mu + s\delta, \mu + s\delta)$. Ввиду линейной независимости собственных подпространств оператора Δ каждое слагаемое должно иметь то же собственное значение, что и вся функция F. Следовательно, $\|s^{-1}\mu + \delta\| = \|\lambda + \delta\|$. Как мы видели в конце § 122, это возможно только в случае $s^{-1}\mu = \lambda$, т. е. $\mu = s\lambda$. Следовательно, F является элементарной функцией с единственным строго доминантным весом $\lambda+\delta$. Следовательно, $F = c_0 \sum_{s \in \mathfrak{S}} (\det s) e(s(\lambda + \delta))$. Сравнивая коэффициенты при $e(\lambda)$, заключаем, что $c_0 = 1$. В результате доказана следующая

Теорема 5. *Характер χ неприводимого конечномерного представления ρ_λ может быть представлен в виде отношения двух элементарных функций:*

$$\chi = \frac{\sum_{s \in \mathfrak{S}} (\det s)\, e\,(s\,(\lambda + \delta))}{\sum_{s \in \mathfrak{S}} (\det s)\, e\,(s\delta)},$$

где λ — старший вес представления ρ_λ и δ — полусумма всех положительных корней. Преобразование s пробегает группу Вейля, и $\det s = \pm 1$.

Над комплексным полем мы можем заменить $e(\mu)$ настоящей экспонентой $\exp(\mu, h)$. Осуществляя, как и в § 73, предельный переход при $h \to 0$, получаем следующую формулу для размерности:

$$N_\lambda = \frac{\prod_{\alpha > 0} (\alpha, \lambda + \delta)}{\prod_{\alpha > 0} (\alpha, \delta)}.$$

Здесь N_λ — размерность представления ρ_λ. Мы преобразуем эту формулу следующим образом. Каждый корень α представим в виде суммы простых корней. Каждый вектор λ, δ разложим по базису h^i, дуальному к векторам $h_i = 2\alpha_i/(\alpha_i, \alpha_i)$:

$$\lambda = \lambda_i h^i, \qquad \delta = \delta_i h^i.$$

Координаты λ_i, δ_i являются числовыми отметками векторов λ и δ: $\lambda_i = 2(\lambda, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i)$, $\delta_i \equiv 1$. Следовательно, числа λ_i являются целыми неотрицательными. Далее, нормируем простые корни α_i таким образом, чтобы числа $w_i = (\alpha_i, \alpha_i)$ принимали значения 1, 2, 3. Поскольку $\alpha_i = \frac{w_i}{2} h_i$ и базисы h_i, h^i дуальны друг другу, то мы имеем

$$N_\lambda = \prod_{(k_i)} \frac{\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i + 1) w_i k_i}{\sum_{i=1}^{r} w_i k_i},$$

где числа k_i определяются из разложения $\alpha = \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i$ и произведение берется по всем последовательностям k_i, $k_i \geqslant 0$, для которых α является корнем.

Замечание. Имея дело с классическими группами, гораздо удобнее пользоваться теми координатами старшего веса $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, которые были введены исходя из основного линейного представления этих групп ($\nu = n$ для $SL(n)$, $\nu = [n/2]$ для $SO(n)$, $Sp(n)$). Например, для $Sp(n)$ мы имеем

$$\chi_\alpha = \frac{1}{Q} \begin{vmatrix} \gamma_1^{l_1} - \gamma_1^{-l_1} & \gamma_1^{l_2} - \gamma_1^{-l_2} & \ldots & \gamma_1^{l_\nu} - \gamma_1^{-l_\nu} \\ \gamma_2^{l_1} - \gamma_2^{-l_1} & \gamma_2^{l_2} - \gamma_2^{-l_2} & \ldots & \gamma_2^{l_\nu} - \gamma_2^{-l_\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_\nu^{l_1} - \gamma_\nu^{-l_1} & \gamma_\nu^{l_2} - \gamma_\nu^{-l_2} & \ldots & \gamma_\nu^{l_\nu} - \gamma_\nu^{-l_\nu} \end{vmatrix},$$

где $l_p = m_p + (\nu - p)$, $p = 1, 2, \ldots, \nu$, и знаменатель Q получается из числителя подстановкой $m_p = 0$. Соответствующая размерность N_α имеет следующий простой

вид:

$$N_\alpha = \frac{1}{Q_0} \prod_{i=1}^{\nu} l_i \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant \nu} (l_i^2 - l_k^2),$$

где Q_0 получается из числителя подстановкой $m_p = 0$. Более подробную информацию по всем этим вопросам можно найти в книге Г. Вейля [10], где вычисление характеров производится интегрально и где для каждой классической группы получается также аналог «второй формулы Вейля», доказанной нами для группы $SL(n)$.

§ 124. Следствия из формулы Вейля

Отметим некоторые простые следствия из формулы Вейля, которые относятся к нахождению кратностей весов и описанию спектра тензорного произведения двух неприводимых представлений.

1° Еще одна рекуррентная формула для кратностей весов. Умножим обе части формулы Вейля на знаменатель Q и приравняем полученные линейные комбинации экспонент:

$$\sum_s \sum_\mu n_\mu \cdot (\det s) \cdot e(\mu + s\delta) = \sum_s (\det s)\, e(s(\lambda + \delta)).$$

Рассмотрим произвольный вес μ, отличный от старшего веса λ; тогда, как мы знаем, $\|\mu + \delta\| < \|\lambda + \delta\|$, и, следовательно, $\mu + \delta$ не может совпадать ни с одним из значений $s(\lambda + \delta)$. Следовательно, суммарный коэффициент в левой части при $e(\mu + \delta)$ должен равняться нулю. Но этот коэффициент получается суммированием по тем весам μ', для которых $\mu' + s\delta = \mu + \delta$. В результате

$$\sum_{s \in \mathfrak{S}} n_{\mu + \delta - s\delta} (\det s) = 0.$$

Поскольку, как мы знаем, $\delta - s\delta > 0$ для всех значений $s \neq e$, то эта формула является рекуррентной. Действительно, она может быть переписана в виде

$$n_\mu = -\sum_{s \neq e} (\det s)\, n_{\mu + \delta - s\delta},$$

где все веса, входящие в правую часть, строго больше μ. Эта формула значительно проще рекуррентной формулы