вид:

$$N_\alpha = \frac{1}{Q_0} \prod_{i=1}^{\nu} l_i \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant \nu} (l_i^2 - l_k^2),$$

где Q_0 получается из числителя подстановкой $m_p = 0$. Более подробную информацию по всем этим вопросам можно найти в книге Г. Вейля [10], где вычисление характеров производится интегрально и где для каждой классической группы получается также аналог «второй формулы Вейля», доказанной нами для группы $SL(n)$.

§ 124. Следствия из формулы Вейля

Отметим некоторые простые следствия из формулы Вейля, которые относятся к нахождению кратностей весов и описанию спектра тензорного произведения двух неприводимых представлений.

1° Еще одна рекуррентная формула для кратностей весов. Умножим обе части формулы Вейля на знаменатель Q и приравняем полученные линейные комбинации экспонент:

$$\sum_s \sum_\mu n_\mu \cdot (\det s) \cdot e(\mu + s\delta) = \sum_s (\det s)\, e(s(\lambda + \delta)).$$

Рассмотрим произвольный вес μ, отличный от старшего веса λ; тогда, как мы знаем, $\|\mu + \delta\| < \|\lambda + \delta\|$, и, следовательно, $\mu + \delta$ не может совпадать ни с одним из значений $s(\lambda + \delta)$. Следовательно, суммарный коэффициент в левой части при $e(\mu + \delta)$ должен равняться нулю. Но этот коэффициент получается суммированием по тем весам μ', для которых $\mu' + s\delta = \mu + \delta$. В результате

$$\sum_{s \in \mathfrak{S}} n_{\mu + \delta - s\delta} (\det s) = 0.$$

Поскольку, как мы знаем, $\delta - s\delta > 0$ для всех значений $s \neq e$, то эта формула является рекуррентной. Действительно, она может быть переписана в виде

$$n_\mu = -\sum_{s \neq e} (\det s)\, n_{\mu + \delta - s\delta},$$

где все веса, входящие в правую часть, строго больше μ. Эта формула значительно проще рекуррентной формулы

Фрейденталя. Эту формулу можно назвать *рекуррентной формулой по «звездочке»* $\delta - s\delta$.

2° Формула Костанта. Попробуем разложить $1/Q$ в бесконечный (формальный) ряд по экспонентам $e(\mu)$. Напомним, что $Q = e(\delta)\prod_{\alpha>0}(1-e(-\alpha))$. Отсюда ясно, что искомое разложение сводится к перемножению геометрических прогрессий:

$$\prod_{\alpha>0}(1-e(-\alpha))^{-1} = \prod_{\alpha>0}(1+e(\alpha)+e(2\alpha)+\ldots) = \\ = \sum_{\mu} P(\mu)\,e(\mu).$$

Здесь функция $P(\mu)$ определяется следующим образом: $P(0)=1$, $P(\mu)$ при $\mu \neq 0$ есть число различных разбиений вектора μ в сумму положительных корней *). Функция $P(\mu)$ называется функцией разбиения. Подставляя теперь полученное разложение в характер $\chi_\lambda = F_\lambda/Q$, находим

$$\sum_{\mu} n_\mu e(\mu) = \sum_{s\in\mathfrak{S}}(\det s)\,e(s(\lambda+\delta))\sum_{\mu'} P(\mu')\,e(-\mu'-\delta).$$

Остается сравнить коэффициенты при каждом базисном элементе $e(\mu)$. Для каждого μ подбираем μ' из равенства $\mu = s(\lambda+\delta)-\mu'-\delta$. В результате получаем следующую формулу:

$$n_\mu = \sum_{s\in\mathfrak{S}}(\det s)\,(P(s(\mu+\delta)-(\mu+\delta))).$$

Эта формула впервые была найдена Костантом ([19]), однако значительно более сложным путем. Указанный простой вывод был отмечен П. Картье [99] и Р. Штейнбергом [147']. Практическое применение этой формулы связано еще со значительными вычислениями.

3° Тензорное произведение двух неприводимых представлений. Вычисляя характер тензорного произведения $\rho_{\lambda_1}\otimes\rho_{\lambda_2}$, с одной стороны, как произведение характеров сомножителей и, с другой сто-

*) Заметим, что указанное определение пригодно при любом $\mu \in H$, однако $P(\mu)=0$, если μ не является целочисленным.

роны, как сумму характеров неприводимых компонент ρ_λ, входящих с кратностями m_λ, получаем следующее равенство:

$$\sum_\mu \sum_s n_\mu (\det s) e(\mu + s(\lambda_2 + \delta)) = \sum_\lambda \sum_s (\det s) m_\lambda e(s(\lambda + \delta)).$$

Здесь мы предварительно умножили обе части на Q и заменили характеры χ_{λ_2}, χ_λ соответствующими альтернированными суммами F_{λ_2}, F_λ. Символ n_μ означает весовую диаграмму представления ρ_{λ_1}. Рассуждая, как при выводе 1°, получаем следующее равенство:

$$m_\lambda = \sum_{s \in \mathfrak{S}} (\det s) n_{\lambda + \delta - s(\lambda_2 + \delta)}.$$

Это равенство выражает искомую кратность m_λ через весовую диаграмму n_μ представления ρ_{λ_1}. Путем несложных преобразований получаем отсюда, как и в § 77, спектральную формулу для $\rho_{\lambda_1} \otimes \rho_{\lambda_2}$:

$$\rho_{\lambda_1} \otimes \rho_{\lambda_2} = \sum_\mu n_\mu \xi_{\mu + \lambda_2 + \delta} \rho_{|\mu + \lambda_2 + \delta| - \delta}.$$

Здесь суммирование ведется по всем весам представления ρ_{λ_1}; $\xi_\nu = 0$, если существует такое преобразование $s \in \mathfrak{S}$, для которого $s\nu = \nu$; $\xi_\nu = \det s_\nu$, если такого s не существует и s_ν переводит вектор ν в доминантный вектор, обозначаемый $|\nu|$.

Заметим, что вышеуказанная формула для кратности m_λ была получена еще Г. Вейлем [10]. Г. Вейль отметил также, что подобный прием пригоден всегда при разложении некоторого представления ρ на неприводимые при условии, что известен характер представления ρ. В частности, аналогичная формула может быть получена при исследовании сужений с группы на подгруппу.

§ 125. Полиномы на картановской подалгебре, инвариантные относительно группы Вейля

При изучении характеров нам пришлось иметь дело с вопросами симметрии относительно группы Вейля. В этом параграфе будут рассмотрены близкие