

вектора  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  в указанном базисе является  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 0$ .

Пример 4. Алгебра  $D_n$ . Исходя из  $2n$ -мерного представления алгебры  $D_n$ , вводим базис, относительно которого группа Вейля порождается перестановками координат  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и преобразованиями вида  $t_i \rightarrow -t_k$  при  $i \neq k$ . В этом случае каждое преобразование из группы Вейля допускает лишь четное число перемен знака. Порядок группы Вейля есть  $2^{n-1} \cdot n!$ . Образующие в алгебре  $I(H)$  таковы:

$$s_{2k}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad \pi(t) = t_1 t_2 \dots t_n.$$

Заметим, что в выбранном базисе условием доминантности вектора  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  является  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{n-1} \geq |m_n|$ . Во всех примерах 1—4 формула Киллинга — Картана (суженная на  $H$ ) диагонализуется в выбранном базисе.

Пример 5. Алгебра  $G_2$ . Порядок группы Вейля в этом случае равен 12 ([19]), стр. 258). Поскольку среди образующих всегда имеется одна квадратичная (квадрат Картана — Киллинга), то в данном случае степени образующих равны 2 и 6.

Относительно остальных особых алгебр Картана см., например, [57]. См. также конец § 127.

## § 126. Операторы Казимира

Пусть  $X$  — полупростая комплексная алгебра Ли и  $\mathfrak{X}$  — ее универсальная обертывающая алгебра. Как мы видели в гл. IX, центр  $\mathfrak{Z}$  алгебры  $\mathfrak{X}$  отождествляется с алгеброй  $I(X)$  всех полиномов над алгеброй  $X$ , инвариантных относительно присоединенного представления. Согласно теореме Шевалле, доказанной в предыдущем параграфе, мы можем также отождествить алгебру  $\mathfrak{Z}$  с алгеброй  $I(H)$  всех полиномов над  $H$ , инвариантных относительно группы Вейля. (Оба эти соответствия линейны, но не мультиплективны.) Элементы алгебры  $\mathfrak{Z}$  мы будем называть *центральными* или *операторами Казимира* алгебры  $X$ .

Если  $c$  — произвольный элемент из алгебры инвариантов  $I(H)$ , то соответствующий оператор Казимира мы

обозначим символом  $C$ . Построение оператора  $C$  по данному  $c$  производится следующим образом. Инвариантный полином  $c(h)$  продолжается (по теореме Шевалле) до полинома  $c(x)$  на алгебре  $X$ , инвариантного относительно присоединенного представления. Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — произвольный базис в алгебре  $X$ , то полином  $c(x)$  выражается через ковариантные числовые координаты:  $c(x) = c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , после чего полагается  $C = c(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

Пусть  $\rho_\lambda$  — произвольное неприводимое конечномерное представление алгебры  $X$  и  $C$  — оператор Казимира в этом представлении. Тогда, как мы знаем,

$$C = \tilde{c}(\lambda)I,$$

т. е. оператор Казимира сводится к умножению на число  $\tilde{c}(\lambda)$ . Функцию  $\tilde{c}(\lambda)$  мы называем собственным значением оператора Казимира; согласно построению она вполне определяется полиномом  $c(h)$ ,  $h \in H$ .

*Теорема 7. Собственное значение всякого оператора Казимира является полиномом от  $\lambda \in H$ . Функции  $\tilde{c}(\lambda)$  и  $c(\lambda)$  имеют один и тот же однородный член старшей степени однородности:*

$$\tilde{c}(\lambda) = c(\lambda) + \dots, \quad \lambda \in H,$$

где многоточие означает сумму слагаемых меньшей степени однородности. Функция  $\tilde{c}(\lambda)$ , как полином от  $\lambda + \delta$  ( $\delta$  — полусумма положительных корней), инвариантна относительно группы Вейля.

*Доказательство.* Воспользуемся разложением Картана — Вейля в алгебре  $X$  (§ 119). Пусть  $m$  — старшая степень однородности в многочлене  $c(e) = c(e_1, e_2, \dots, e_n)$  и  $f(e)$  — произвольный одночлен из  $c(e)$ , имеющий степень  $m$ . Используя для  $f(e)$  разложение Картана — Вейля, мы можем записать (с точностью до слагаемых меньшей степени однородности)

$$f(e) = e_{-\alpha_1} e_{-\alpha_2} \dots e_{-\alpha_p} \varphi(h) e_{\beta_1} e_{\beta_2} \dots e_{\beta_q},$$

где корни  $\alpha_i, \beta_j$  положительны и  $\varphi(h)$  — одночлен от базисных векторов в  $H$ . Поскольку  $c(x)$  является инвариантом присоединенного представления, то, в частно-

сти, он является весовым вектором веса нуль относительно подалгебры  $H$ . Следовательно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_q.$$

Рассмотрим теперь произвольное конечномерное представление  $\rho_\lambda$ . Поскольку оператор  $C$  является скаляром в  $\rho_\lambda$ , то для вычисления  $\tilde{c}(\lambda)$  достаточно применить оператор  $C$  к старшему вектору  $\xi$ . Пусть  $F$  — оператор, отвечающий одночлену  $f(e)$ . Тогда мы имеем  $F\xi = 0$ , если  $q \neq 0$ . Следовательно, ненулевой вклад вносят только те слагаемые  $f(e)$ , для которых  $q = 0$ . Но тогда и  $p = 0$  (в силу соотношения между корнями, указанного выше). Следовательно, если  $\tilde{c}_m(\lambda)$  — сумма собственных значений всех одночленов  $f(e)$  степени однородности  $m$  на векторе  $\xi$ , то

$$\tilde{c}_m(\lambda) = c_m(\lambda),$$

где  $\tilde{c}_m(\lambda)$  — сумма собственных значений тех одночленов  $f(e)$ , для которых  $p = q = 0$ . Для выделения этих одночленов достаточно символы  $e_\alpha$  заменить нулями, что равносильно (ввиду ортогональности  $e_\alpha$ ,  $H$ ) сужению полинома  $c(x)$  на подалгебру  $H$ . Наконец, очевидно, что  $c_m(\lambda)$  является полиномом от  $\lambda$ , поскольку  $\rho_\lambda(h)\xi = (\lambda, h)\xi$ , где  $(\lambda, h)$  — линейная форма над  $H$ .

Продолжая эти рассуждения для всех остальных однородных компонент, заключаем, что  $\tilde{c}(\lambda)$  является полиномом от  $\lambda$  и полиномы  $\tilde{c}(\lambda)$ ,  $c(\lambda)$  имеют общий старший член  $\tilde{c}_m(\lambda) = c_m(\lambda)$  \*).

Для завершения доказательства осталось показать, что  $\tilde{c}(\lambda) = \varphi(\lambda + \delta)$ , где полином  $\varphi(h)$  инвариантен относительно группы Вейля. Рассмотрим вместо  $\rho_\lambda$  соответствующее представление  $d(\alpha)$  односвязной группы  $G$  с алгеброй Ли  $X$ . Реализуя  $d(\alpha)$  в классе матричных элементов на группе  $G$ , мы рассмотрим, в частности, характер  $\chi_\alpha(g)$ , который, как линейная комбинация матричных элементов сигнатуры  $\alpha$ , должен быть собствен-

\* ) Точнее, мы рассматриваем  $\tilde{c}(\lambda)$ ,  $c(\lambda)$  как значения некоторых полиномов на доминантных целочисленных векторах  $\lambda \in H$ .

ным вектором оператора  $C$  с собственным значением  $\tilde{c}(\lambda)$ :

$$C\chi_a(g) = \varphi(\mu)\chi_a(g), \quad \text{где } \mu = \lambda + \delta.$$

Нам будет удобно далее сделать унитарное ограничение, т. е. считать, что  $g \in \mathfrak{U}$ , где  $\mathfrak{U}$  — максимальная компактная подгруппа в группе  $G$ . Полагая  $g = u^{-1}\gamma u$ , где  $\gamma$  проходит максимальный тор, мы видим, что  $\chi_a(g)$  зависит только от  $\gamma$  (действительно,  $\chi_a$  является функцией классов). Следовательно,

$$C\chi_a(g) = \overset{\circ}{C}\chi_a(g),$$

где  $\overset{\circ}{C}$  — дифференциальный оператор относительно канонических координат  $t_1, t_2, \dots, t_r$  элемента  $\gamma^*$ ). Положим согласно формуле Вейля  $\chi_a = F_a/Q$ , где  $F_a$  и  $Q$  — кососимметрические функции от  $t_1, t_2, \dots, t_r$ , и введем обозначение  $\Delta = Q\overset{\circ}{C}Q^{-1}$ . Тогда мы имеем

$$\Delta F_a(t) = \varphi(\mu) F_a(t).$$

Здесь  $\Delta$  — дифференциальный оператор по параметрам  $t$  и  $\mu = \lambda + \delta$ . Напомним, что  $F_a = \sum \pm \exp(s\mu, h)$ . Заменяя  $\mu$  на  $s\mu$ , мы сохраняем функцию  $F_a$  с точностью до знака. Следовательно,  $\varphi(s\mu) = \varphi(\mu)$ . Теорема доказана.

**Замечание 1.** В формулировке теоремы предполагалось, что  $C$  — симметризованный оператор Казимира, т. е. полином  $c(e)$  выражается через базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  с помощью симметричных тензорных коэффициентов. Однако в действительности это ограничение излишне. В самом деле, как мы видели в гл. IX, всякий полином  $c(e)$  и его симметризованная форма имеют одно и то же слагаемое старшей степени однородности.

**Замечание 2.** Если  $C$  — квадратичный оператор Казимира, то, как легко проверить, соотношение  $\Delta = Q\overset{\circ}{C}Q^{-1}$ , использованное в доказательстве теоремы 7, устанавливает связь между радиальной частью  $\overset{\circ}{C}$  оператора  $C$  и формальным лапласианом  $\Delta$ , введенным в

\* ) Оператор  $\overset{\circ}{C}$  называется *радиальной частью* оператора  $C$ .

**§ 123.** Оказывается также, что в общем случае оператор  $\Delta$  является дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами по  $t_1, t_2, \dots, t_r$ , инвариантным относительно группы Вейля. Это позволило Ф. А. Березину [49] дать полное описание радиальных частей операторов Казимира \*).

**Следствие 1.** Алгебра собственных значений  $\tilde{c}(\lambda)$  изоморфна алгебре  $I(H)$  всех полиномов над  $H$ , инвариантных относительно группы Вейля.

В свою очередь отсюда получаем

**Следствие 2.** Алгебра  $\mathfrak{Z}$  операторов Казимира изоморфна алгебре  $I(H)$ . В частности, алгебра  $\mathfrak{Z}$  имеет ровно  $r$  независимых образующих.

Действительно, соответствие между оператором  $C$  и собственным значением  $\tilde{c}(\lambda)$  является линейным и мультипликативным. Кроме того, если  $\tilde{c}(\lambda) = 0$ , то  $c(\lambda) = 0$  (согласно теореме 7), и отсюда  $C = 0$ . Следовательно, это соответствие взаимно однозначно. Заметим, что образующие можно выбрать однородными, и для их степеней по-прежнему выполняется условие  $p_1 p_2 \dots p_r = w$ , где  $w$  — порядок группы Вейля. Отсюда легко получаем также \*\*)

**Следствие 3.** Собственные значения операторов Казимира определяют представление  $\rho_\lambda$  однозначно с точностью до эквивалентности.

Примеры, связанные с алгеброй  $sl(n)$ , мы уже рассматривали в гл. IX. В следующем параграфе остановимся на алгебрах  $so(n)$ ,  $sp(n)$ .

## § 127. О вычислении собственных значений операторов Казимира

В гл. IX мы воспользовались  $n$ -мерным представлением алгебры  $sl(n)$  для вычисления собственных значений ее операторов Казимира. Аналогичное построение не трудно провести и для других классических алгебр Ли.

\* ) Отсюда вытекает еще один способ вычисления характера  $\chi_\lambda$  (поскольку  $\chi_\lambda = F_\lambda/Q$ , где  $F_\lambda$  — собственная функция квадратичного оператора  $\Delta = \partial^2/\partial t_1^2 + \partial^2/\partial t_2^2 + \dots + \partial^2/\partial t_r^2$ ).

\*\*) См. по этому поводу [39], стр. 47.