

**§ 123.** Оказывается также, что в общем случае оператор  $\Delta$  является дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами по  $t_1, t_2, \dots, t_r$ , инвариантным относительно группы Вейля. Это позволило Ф. А. Березину [49] дать полное описание радиальных частей операторов Казимира \*).

**Следствие 1.** Алгебра собственных значений  $\tilde{c}(\lambda)$  изоморфна алгебре  $I(H)$  всех полиномов над  $H$ , инвариантных относительно группы Вейля.

В свою очередь отсюда получаем

**Следствие 2.** Алгебра  $\mathfrak{Z}$  операторов Казимира изоморфна алгебре  $I(H)$ . В частности, алгебра  $\mathfrak{Z}$  имеет ровно  $r$  независимых образующих.

Действительно, соответствие между оператором  $C$  и собственным значением  $\tilde{c}(\lambda)$  является линейным и мультипликативным. Кроме того, если  $\tilde{c}(\lambda) = 0$ , то  $c(\lambda) = 0$  (согласно теореме 7), и отсюда  $C = 0$ . Следовательно, это соответствие взаимно однозначно. Заметим, что образующие можно выбрать однородными, и для их степеней по-прежнему выполняется условие  $p_1 p_2 \dots p_r = w$ , где  $w$  — порядок группы Вейля. Отсюда легко получаем также \*\*)

**Следствие 3.** Собственные значения операторов Казимира определяют представление  $\rho_\lambda$  однозначно с точностью до эквивалентности.

Примеры, связанные с алгеброй  $sl(n)$ , мы уже рассматривали в гл. IX. В следующем параграфе остановимся на алгебрах  $so(n)$ ,  $sp(n)$ .

## § 127. О вычислении собственных значений операторов Казимира

В гл. IX мы воспользовались  $n$ -мерным представлением алгебры  $sl(n)$  для вычисления собственных значений ее операторов Казимира. Аналогичное построение не трудно провести и для других классических алгебр Ли.

\* ) Отсюда вытекает еще один способ вычисления характера  $\chi_\lambda$  (поскольку  $\chi_\lambda = F_\lambda/Q$ , где  $F_\lambda$  — собственная функция квадратичного оператора  $\Delta = \partial^2/\partial t_1^2 + \partial^2/\partial t_2^2 + \dots + \partial^2/\partial t_r^2$ ).

\*\*) См. по этому поводу [39], стр. 47.

Условимся записывать фундаментальную билинейную форму для  $so(n)$ ,  $sp(n)$  в том же виде, как и в гл. XVI, и занумеруем все координаты числами  $-v, -v+1, \dots, v-1, v$ , где  $v = [n/2]$ , с пропуском нуля при четном  $n$ . Тогда соотношения коммутации в алгебре Ли записываются следующим образом:

$$[X_{ij}, X_{kl}] = (\delta_{jk}X_{il} - \delta_{il}X_{kj}) + (\epsilon_{j, -l}X_{k, -i} - \epsilon_{k, -l}X_{-j, i}),$$

при соответствующем выборе базисных операторов  $X_{ij}$ , где положено

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{для } so(n), \\ \epsilon_i \epsilon_j \delta_{ij} & \text{для } sp(n), \end{cases}$$

причем  $\epsilon_k = \operatorname{sgn} k$  ( $0$  при  $k = 0$ ,  $1$  при  $k > 0$ ,  $-1$  при  $k < 0$ ). Нетрудно проверить, что при этом выборе базиса следующие операторы являются операторами Казимира:

$$C_p = \sum_{i_1 i_2 \dots i_p} X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \dots X_{i_p i_1}, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Из рассмотрений предыдущего параграфа нетрудно заключить, что среди таких операторов содержится система образующих центра для  $sp(n)$  и для  $so(n)$  при нечетном  $n$ . В последнем случае при четном  $n$  достаточно добавить еще один оператор Казимира:

$$C'_v = \sum \pm X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_2} \dots X_{i_v j_v},$$

где сумма берется по всем наборам индексов  $i_1, i_2, \dots, i_v$  и их перестановкам  $j_1, j_2, \dots, j_v$ ; при этом знак  $\pm$  отвечает четности или нечетности перестановки. Не останавливаясь на вычислениях, приведем окончательные результаты ([123]).

Условимся записывать старший вес в виде сигнатуры  $\alpha = (m_1, m_2, \dots, m_v)$  с соотношениями порядка, указанными в гл. XVI. Введем в рассмотрение треугольную матрицу с элементами

$$a_{ii} = (l_i + \beta) \delta_{ii} - \theta_{ii} + \frac{1}{2} \gamma_i \delta_{i, -i},$$

где  $l_i = m_i + l_i^0$  — линейные формы от  $m_i$  и все коэффициенты даются следующей таблицей:

Алгебра	$\beta$	$\gamma_i$	$t_i^0$
$so(2v+1)$	$v - 1/2$	$1 + \epsilon_i$	$(n + 1/2) \epsilon_i - i$
$sp(2v)$	$v$	$-(1 + \epsilon_i)$	$(n + 1) \epsilon_i - i$
$so(2v)$	$v - 1$	$1 + \epsilon_i$	$n \epsilon_i - i$

Кроме того, матрица  $\|\theta_{ij}\|$  определяется следующим образом:  $\theta_{ij} = 1$  при  $i > j$ ,  $\theta_{ij} = 0$  при  $i \leq j$ . Нетрудно видеть, что если индексы  $i, j$  расположены в порядке возрастания (от  $-v$  до  $v$ ), то матрица  $\|a_{ij}\|$  является нижней треугольной.

Пусть  $\sigma_p(\alpha)$  означает собственное значение оператора  $C_p$  в неприводимом представлении  $d(\alpha)$ . Тогда имеет место следующая формула:

$$\sigma_p(a) = \text{sp } a^p E, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $a^p$  —  $p$ -я степень матрицы  $a = \|a_{ij}\|$  и  $E$  — постоянная матрица, у которой все матричные элементы равны единице. Для собственного значения  $\sigma'(\alpha)$  оператора  $C'_v$  получается следующий результат:

$$\sigma'(a) = (-1)^{\frac{v(v-1)}{2}} \cdot 2^v \cdot v! l_1 l_2 \dots l_v.$$

Из полученных результатов (за исключением последнего) не видна непосредственно симметрия собственных значений относительно группы Вейля. Однако по аналогии с § 60 можно получить следующий результат:  $C_p = \sum_i \xi_i \lambda_i^p$ , где  $\lambda_i = l_i + \beta$  — собственное значение матрицы  $a$  и где положено

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0, \\ \prod_{j \neq i} \left( 1 + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{l_i - l_j} \right) & \text{при } i \neq 0. \end{cases}$$

При этом полагается также  $l_0 = 0$ , откуда  $\lambda_0 = \beta + 1/2$  (для алгебры  $so(2v+1)$ ). Умножая каждый оператор  $C_p$  на степень  $z^p$  вспомогательной переменной  $z$  и суммируя по  $p$  от 0 до  $\infty$ , получаем «производящую

функцию» операторов  $C_p$ :

$$C(z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p z^p = \sum_i \frac{\xi_i}{1 - \lambda_i z}.$$

Путем несложных преобразований можно привести эту функцию также к виду  $C(z) = (1 - \Pi(z))/z$ , где положено

$$\Pi(z) = \prod_i \left(1 - \frac{z}{1 - \lambda_i z}\right).$$

Из этих выражений становится уже очевидной симметрия собственных значений относительно группы Вейля.

**Замечание 1.** Замечательной особенностью  $n$ -мерных линейных представлений, использованных при получении указанных результатов, является *простота* весового спектра. Иначе говоря, каждый вес в таком представлении встречается с кратностью единицы. Подобными представлениями обладают также алгебры  $G_2$ ,  $E_6$  и  $E_7$ . Если взять за основу такое линейное представление полупростой комплексной алгебры  $X$ , то все указанные выше результаты легко обобщаются на этот случай.

**Замечание 2.** Как мы видели в предыдущем параграфе, каждому оператору Казимира отвечают два полинома на алгебре  $H$ :  $c(\lambda)$ ,  $\tilde{c}(\lambda)$ . Первый из этих полиномов непосредственно определяет структуру оператора  $C$ , второй означает его собственное значение в  $\rho_\lambda$ . Ф. А. Березину [51] удалось установить непосредственную связь между этими полиномами. Тем самым возникает еще один метод явного вычисления собственных значений.

В заключение этой главы приведем без доказательства (см. [57], [143]) порядки образующих операторов Казимира для исключительных алгебр Картана:

$$G_2: 2, 6.$$

$$F_4: 2, 6, 8, 12.$$

$$E_6: 2, 5, 6, 8, 9, 12.$$

$$E_7: 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18.$$

$$E_8: 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30.$$

Отсюда легко вычисляется также порядок группы Вейля:  $w = p_1 p_2 \dots p_r$ , где  $p_i$  — порядок  $i$ -й образующей. Числа  $p_i$  тесно связаны ([143]) с важнейшими топологическими характеристиками соответствующей группы Ли (числа Бетти, полином Пуанкаре).

### Упражнения

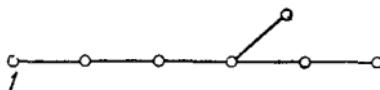
1. Пусть  $\lambda$  — строго доминантный вектор из картановской подалгебры  $H$ . Показать, что число точек на орбите  $O_\lambda = \mathfrak{S} \cdot \lambda$  равно порядку группы Вейля  $\mathfrak{S}$ .

2. Пусть  $\lambda$  — доминантный вектор из  $H$  и  $\mathfrak{S}_\lambda$  — подгруппа в группе Вейля, состоящая из всех элементов  $s$ , для которых  $s\lambda = \lambda$ . Показать, что группа  $\mathfrak{S}_\lambda$  порождается рефлексиями  $s_i$  относительно тех простых корней  $\omega_i$ , для которых  $(\lambda, \omega_i) = 0$ .

3. Показать, что группа  $\mathfrak{S}_\lambda$  из упражнения 2 изоморфна группе Вейля для полупростой подалгебры  $X_\lambda$ , порожденной образующими  $e_{-\omega_i}, \omega_i, e_{\omega_i}$ , для которых  $(\lambda, \omega_i) = 0$ .

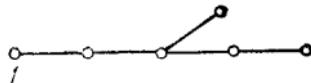
4. Пусть  $\lambda$  — доминантный вектор из  $H$ . Показать, что число точек на орбите  $O_\lambda = \mathfrak{S} \cdot \lambda$  равно отношению порядков группы  $\mathfrak{S}$  и подгруппы  $\mathfrak{S}_\lambda$  — стационарной подгруппы точки  $\lambda$ . (Указание: использовать упражнение 2 на стр. 86.)

5. Пусть  $d_1$  — базисное представление алгебры  $E_7$  с числовыми отметками



(отсутствие цифры у простого корня  $\omega_i$  означает равенство нулю соответствующей отметки  $\lambda_i$ ). Показать, что множество всех весов такого представления состоит из единственной орбиты относительно группы Вейля. (Указание: воспользоваться упражнением 4 и проверить по формуле Вейля, что размерность данного представления равняется 56.)

6. Пусть  $d_1$  — базисное представление алгебры  $E_6$  с числовыми отметками



Показать, что множество весов такого представления распадается на две орбиты относительно группы Вейля.

\* \* \*

Независимое рассмотрение полупростой комплексной алгебры Ли позволяет, как мы видим, получать простые алгебраические доказательства многих фактов глобальной теории. Классификация

неприводимых представлений  $\rho_\lambda$  была впервые получена Э. Картаном [97] путем пересмотра в отдельности каждого типа простых алгебр Ли ( $A_n - G_2$ ). Общее доказательство было получено почти одновременно Хариш-Чандрай [138] и Шевалле (доказательство Шевалле не опубликовано). Здесь мы излагаем упрощенный вариант доказательства Хариш-Чандры, принадлежащий Н. Джекобсону [19]. Одним из преимуществ алгебраического доказательства является возможность рассмотрения также некоторых бесконечномерных (экстремальных) представлений алгебры Ли. Кроме того, на этом пути возникает также доказательство существования особых алгебр Картана ([19]). Остальные библиографические ссылки были сделаны непосредственно в тексте. Результаты упражнений 5 и 6 сообщены автору Э. Б. Винбергом.