Упражнение

Показать, что при сужении $d(\alpha)|_{G^0}$ неприводимая компонента со старшим весом $\alpha(\delta)$, $\delta \in D^0$, входит однократно и является старшей относительно лексикографического упорядочения весов. (Указание: проверить, что единственным весовым мультипликатором веса α является функция $f_0(z) \equiv 1$.)

Если корни подгруппы G^0 являются также корнями группы G, то такое вложение называется *регулярным*. Если то же имеет место для простых корней, то такое вложение называется *нормальным* (см. § 110). В действительности первый случай можно свести ко второму внутренним автоморфизмом, однако на этом мы здесь останавливаться не будем. Если вложение нормальное, то, как мы видели в § 110, корневая группа Z всегда допускает указанное выше разложение, причем Z' является нормальным делителем в Z. В этом случае решение задачи значительно упрощается.

Очевидно, метод Z-инвариантов позволяет не только найти спектральную формулу, но также и определить все неприводимые подпространства (как циклические оболочки старших векторов).

После всех этих общих замечаний перейдем к рассмотрению отдельных примеров.

§ 129. Сужение $SO(n)/SO(n-1)$

Рассмотрим вначале тот случай, когда размерность n является нечетной, $n = 2\nu + 1$. Подгруппу G^0 мы выделяем условием сохранения базисного вектора с номером $\nu + 1$. Тогда в силу ортогональности координата $x_{\nu+1} = (x, e_{\nu+1})$ также остается инвариантной. Здесь скалярное произведение выбирается в том же виде, что и в § 114. Все матрицы из G^0 записываются с помощью четырех квадратных блоков $\nu \times \nu$, разделенных нулями, с единицей на пересечении $(\nu+1)$-й строки и $(\nu+1)$-го столбца. В частности, матрицы из Z^0 имеют следующий общий вид:

$$z_0 = \begin{Vmatrix} z_{11} & 0 & z_{12} \\ & 1 & 0 \\ & & z_{22} \end{Vmatrix},$$

где z_{ij} — квадратные блоки $\nu \times \nu$, под диагональю стоят нули и блоки z_{ij} связаны также условиями принадлежности группе Z. Дополнительное многообразие Z' можно в этом случае составить из матриц

$$z' = \begin{Vmatrix} e & \alpha & \frac{1}{2}\alpha\beta \\ & 1 & \beta \\ & & e \end{Vmatrix},$$

где e — единичная матрица порядка ν, α — произвольный столбец и β — строка, линейно выражающаяся через α: $\beta' = -s\alpha$, где s — специальная матрица порядка ν, введенная в § 113. Действительно, легко проверить, что матрица z' содержится в группе Z и произведение $z = z'z_0$ пробегает по одному разу все элементы из группы Z *). При этом z имеет вид

$$z = z'z_0 = \begin{Vmatrix} z_{11} & \alpha & \tilde{z}_{12} \\ & 1 & \tilde{\beta} \\ & & z_{22} \end{Vmatrix},$$

где явное выражение блока $\tilde{z}_{12}$ через α, z_{12}, z_{22} нам не будет нужно. Искомые Z^0-инварианты являются функциями только от чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, входящих в столбец α.

Найдем индикаторную систему в классе функций, зависящих только от α. Применяя к матрице z левый сдвиг, отвечающий i-му корневому вектору, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, находим, что это преобразование в классе параметров α сводится к замене α_i на $\alpha_i + t\alpha_{i+1}$, где t — параметр сдвига и $\alpha_{\nu+1} = 1$. В результате получаем инфинитезимальные главные сдвиги

$$\mathscr{D}_i = \alpha_{i+1}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu.$$

---

*) Умножая произвольную матрицу $z \in Z$ на подходяще выбранный множитель z_0^{-1}, мы можем сделать диагональные блоки единичными; тогда полученная матрица необходимо имеет вид z'. Кроме того, $Z' \cap Z^0 = \{e\}$, и отсюда следует, что полученное разложение $z = z'z_0$ однозначно.

Выписывая индикаторную систему в классе функций $f(\alpha) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, находим, что искомое пространство Z^0-инвариантов натянуто на следующий базис:

$$f_k(\alpha) = \alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2} \ldots \alpha_\nu^{k_\nu}, \qquad 0 \leqslant k_i \leqslant r_i,$$

где $r_i = m_i - m_{i+1}$ — неотрицательные целые параметры исходной сигнатуры $\alpha = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_\nu \geqslant 0$, $m_{\nu+1} = 0$. Применяя к такому вектору преобразование T_δ, $\delta \in D^0$, находим, что этот вектор является весовым с весом

$$\gamma_k(\lambda) = \lambda_1^{m_1-k_1}\lambda_2^{m_2-k_2} \ldots \lambda_\nu^{m_\nu-k_\nu}.$$

Введем обозначение $p_i = m_i - k_i$; тогда в силу указанных выше ограничений на параметры k_i получаем систему ограничений на параметры p_i: $m_1 \geqslant p_1 \geqslant m_2 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant m_\nu \geqslant p_\nu \geqslant -m_\nu$. В результате доказана следующая

Теорема 2. *Сужение* $SO(2\nu+1)/SO(2\nu)$ *определяется при указанном выше выборе базиса следующей спектральной формулой*:

$$d(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)|_{G^0} = \sum_{m_i \geqslant p_i \geqslant m_{i+1}} d(p_1, p_2, \ldots, p_\nu),$$

где $m_{\nu+1}$ *заменяется на* $-m_\nu$. *Здесь параметры* p_i *принимают одновременно целые или одновременно полуцелые значения в зависимости от целости или полуцелости параметров* m_i.

Следствие. *Каждое неприводимое представление подгруппы* $SO(2\nu)$ *содержится в указанном сужении однократно.*

Рассмотрим теперь тот случай, когда размерность n является четной, $n = 2\nu$. Подгруппа G^0 выделяется условием инвариантности двух базисных векторов: e_ν, $e_{\nu+1}$. Ввиду ортогональности при этом сохраняются также координаты $x_\nu = (x, e_{\nu+1})$, $x_{\nu+1} = (x, e_\nu)$. Многообразие Z' составляется из матриц

$$z' = \begin{Vmatrix} e & \alpha & \alpha & \alpha\beta \\ & 1 & 0 & \beta \\ & & 1 & \beta \\ & & & e \end{Vmatrix},$$

где e — единичная матрица порядка $\nu-1$, α — столбец, состоящий из независимых переменных, β — строка, которая линейно выражается через α. При этом переменные α_i, $i=1, 2, \ldots, \nu-1$, выражаются в разложении $z=z'z_0$ следующими формулами:

$$\alpha_i=\frac{1}{2}(z_{i\nu}+z_{i,\nu+1}), \qquad i=1, 2, \ldots, \nu-1,$$

через параметры исходной матрицы z. Заменяя пару переменных $z_{i\nu}$, $z_{i,\nu+1}$ их полусуммой α_i и полуразностью θ_i, легко получаем, что главные сдвиги в классе функций, зависящих только от α_i, имеют следующий вид:

$$\mathscr{D}_i=\alpha_{i+1}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}, \quad i=1, 2, \ldots, \nu-2, \quad \mathscr{D}_-=\mathscr{D}_+=\frac{\partial}{\partial\alpha_{\nu-1}}.$$

В этом случае старшими векторами относительно G^0 по-прежнему являются одночлены, и несложный подсчет сигнатур показывает, что в искомое разложение входят только сигнатуры $(q_1, q_2, \ldots, q_{\nu-1})$, для которых $m_1\geqslant q_1\geqslant m_2\geqslant q_2\geqslant \ldots \geqslant q_{\nu-1}\geqslant |m_\nu|$. Результатом является

Теорема 3. *Сужение* SO(2ν)/SO(2ν — 1) *определяется при указанном выше выборе базиса следующей спектральной формулой*:

$$(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)|_{G_0}=\sum_{m_i\geqslant q_i\geqslant m_{i+1}}(q_1, q_2, \ldots, q_{\nu-1}),$$

где m_ν заменяется на $|m_\nu|$. Здесь параметры q_i принимают одновременно целые или одновременно полуцелые значения в зависимости от целости или полуцелости параметров m_i.

Следствие. *Каждое неприводимое представление* SO(2ν — 1) *содержится в указанном сужении однократно.*

Теоремы 2 и 3 в совокупности позволяют получить в пространстве $\mathfrak{R}_\alpha$ естественный базис из старших векторов цепочки вложенных подгрупп: $SO(n)\supset SO(n-1)\supset\ldots\supset SO(3)\supset SO(2)$. Каждый вектор базиса нумеруется системой чисел m_{ik}, $i, k=2, 3, \ldots, n$, $m_{in}=m_i$, с определенной системой ограничений. При

нечетном n имеем

$$m_{1n} \geqslant m_{1,\,n-1} \geqslant m_{2n} \geqslant m_{2,\,n-1} \geqslant \ldots \geqslant m_{\nu n} \geqslant m_{\nu,\,n-1} \geqslant -m_{\nu n},$$
$$m_{1,\,n-1} \geqslant m_{1,\,n-2} \geqslant m_{2,\,n-1} \geqslant \ldots \geqslant m_{\nu-1,\,n-2} \geqslant |m_{\nu,\,n-1}|,$$
$$m_{1,\,n-2} \geqslant m_{1,\,n-3} \geqslant m_{2,\,n-2} \geqslant \ldots \geqslant m_{\nu-1,\,n-3} \geqslant -m_{\nu-1,\,n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m_{15} \geqslant m_{14} \geqslant m_{25} \geqslant m_{24} \geqslant -m_{25},$$
$$m_{14} \geqslant m_{13} \geqslant |m_{24}|,$$
$$m_{13} \geqslant m_{12} \geqslant -m_{13}.$$

При четном n аналогичную систему можно получить, отбрасывая первую строку. Такое определение базиса было впервые предложено И. М. Гельфандом и М. Л. Цейтлиным [73]. При этом, как и в случае $SL(n)$, были указаны явные формулы для инфинитезимальных операторов $SO(n)$ в этом базисе. Однако внутренняя структура $d(\alpha)$ в этом случае еще плохо изучена. В частности, неизвестны «понижающие» и «повышающие» операторы.

Интересную информацию дают также теоремы 2 и 3 при рассмотрении спинорных представлений. Пусть s_0 — спинорное представление $SO(2\nu+1)$ с сигнатурой $(1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$. Согласно теореме 2 сужение s_0 на подгруппу $SO(2\nu)$ распадается в прямую сумму двух неприводимых представлений с сигнатурами $(1/2, 1/2, \ldots, -1/2)$, $(1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$:

$$s_0|_{G^0} = s_- + s_+.$$

Иначе говоря, при сужении на $G^0 \approx SO(2\nu)$ мы получаем два зеркально сопряженных спинора первого и второго рода. С другой стороны, сужая эти представления на подгруппу $G^{00} \approx SO(2\nu-1)$, получаем согласно теореме 3, что оба они остаются неприводимыми и совпадают с представлением типа s_0. Из соображений индукции отсюда, в частности, следует

$$\dim s_0 = 2^\nu, \quad \dim s_- = \dim s_+ = 2^{\nu-1}.$$

Заметим также, что зеркально сопряженные представления $SO(2\nu)$ становятся эквивалентными для под-

группы $SO(2\nu-1)$. В свою очередь при сужении $SO(2\nu+1)/SO(2\nu)$ вместе с каждым неприводимым представлением встречается также зеркально сопряженное.

§ 130. Сужение $Sp(n)/Sp(n-2)$

В данном случае редукция нетривиальна ввиду того, что размерность приходится понижать сразу на две единицы. Правда, вместо подгруппы, изоморфной $Sp(n-2)$, можно рассматривать подгруппу, изоморфную $Sp(n-2)\times Sp(2)$ (о чем мы скажем ниже). Вместо этого мы рассмотрим сейчас несколько более легкую задачу, выделяя в $Sp(2)$ ее диагональную часть.

Группа $G=Sp(n)$ реализуется так же, как и в § 113. Напомним, что n четно, $n=2\nu$. Подгруппа G^0 определяется как совокупность всех преобразований из $Sp(n)$, которые диагональны на координатах с номерами ν, $\nu+1$. При этом из условия симметричности вытекает, что мы вправе рассматривать только преобразования $x_\nu\to\lambda x_\nu$, $x_{\nu+1}\to\lambda^{-1}x_{\nu+1}$. Полагая $\lambda=1$, получаем подгруппу, изоморфную $Sp(n-2)$. Ясно также, что G^0 изоморфна $Sp(n-2)\times\Lambda$, где Λ — мультипликативная группа комплексных чисел. Сигнатуру этой группы мы будем записывать в виде

$$(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{\nu-1}\,|s),$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_{\nu-1}$ — сигнатура подгруппы $Sp(n-2)$ и s — целочисленный параметр, определяющий характер λ^s подгруппы Λ.

Теорема 4. *Сужение $d(\alpha)=d(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$ на подгруппу G^0 содержит в спектре все сигнатуры вида*

$$\gamma_{pq}=(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{\nu-1}\,|\,s_{pq}),$$

где положено

$$s_{pq}=2\sum_{i=1}^{\nu}p_i-\sum_{j=1}^{\nu-1}q_j-\sum_{k=1}^{\nu}m_k$$