

группы $SO(2v-1)$. В свою очередь при сужении $SO(2v+1)/SO(2v)$ вместе с каждым неприводимым представлением встречается также зеркально сопряженное.

§ 130. Сужение $Sp(n)/Sp(n-2)$

В данном случае редукция нетривиальна ввиду того, что размерность приходится понижать сразу на две единицы. Правда, вместо подгруппы, изоморфной $Sp(n-2)$, можно рассматривать подгруппу, изоморфную $Sp(n-2) \times Sp(2)$ (о чем мы скажем ниже). Вместо этого мы рассмотрим сейчас несколько более легкую задачу, выделяя в $Sp(2)$ ее диагональную часть.

Группа $G = Sp(n)$ реализуется так же, как и в § 113. Напомним, что n четно, $n = 2v$. Подгруппа G^0 определяется как совокупность всех преобразований из $Sp(n)$, которые диагональны на координатах с номерами $v, v+1$. При этом из условия симметричности вытекает, что мы вправе рассматривать только преобразования $x_v \rightarrow \lambda x_v, x_{v+1} \rightarrow \lambda^{-1} x_{v+1}$. Полагая $\lambda = 1$, получаем подгруппу, изоморфную $Sp(n-2)$. Ясно также, что G^0 изоморфна $Sp(n-2) \times \Lambda$, где Λ — мультиплексивная группа комплексных чисел. Сигнатуру этой группы мы будем записывать в виде

$$(q_1, q_2, \dots, q_{v-1} | s),$$

где q_1, q_2, \dots, q_{v-1} — сигнатура подгруппы $Sp(n-2)$ и s — целочисленный параметр, определяющий характер λ^s подгруппы Λ .

Теорема 4. Сужение $d(\alpha) = d(m_1, m_2, \dots, m_v)$ на подгруппу G^0 содержит в спектре все сигнатуры вида

$$\gamma_{pq} = (q_1, q_2, \dots, q_{v-1} | s_{pq}),$$

где положено

$$s_{pq} = 2 \sum_{i=1}^v p_i - \sum_{j=1}^{v-1} q_j - \sum_{k=1}^v m_k$$

и где целочисленные индексы q_j, p_i принимают всевозможные значения в пределах

$$\begin{aligned} m_1 &\geq p_1 \geq m_2 \geq p_2 \geq m_3 \geq \dots \geq p_{v-1} \geq m_v \geq p_v \geq 0, \\ p_1 &\geq q_1 \geq p_2 \geq q_2 \geq \dots \geq p_{v-1} \geq q_{v-1} \geq p_v. \end{aligned}$$

Если $v = 1$, то символы q отсутствуют и $m_1 \geq p_1 \geq 0$.

Доказательство. Искомое пространство Z^0 -инвариантов состоит из полиномов, которые зависят только от элементов следующих двух столбцов:

$$\begin{matrix} z_{1v} & z_{1, v+1} \\ z_{2v} & z_{2, v+1} \\ \cdot & \cdot \\ 1 & z_{v, v+1} \end{matrix}$$

при условии, что параметры в группе Z выбираются так же, как и в § 113 (первый способ). Индикаторная система в пространстве Ω_α имеет вид

$$\mathcal{D}_i^{r_i+1} f = \left(z_{i+1, v} \frac{\partial}{\partial z_{iv}} + z_{i+1, v+1} \frac{\partial}{\partial z_{i, v+1}} \right)^{r_i+1} f = 0.$$

Здесь положено $z_{vv} = z_{v+1, v+1} = 1$, $z_{v+1, v} = 0$ и параметры r_i выражаются через параметры m_i обычными формулами: $r_i = m_i - m_{i+1}$, $m_{v+1} = 0$. Решение такой системы довольно сложно, однако мы можем воспользоваться аналогией с полной линейной группой $GL(v+1)$. Действительно, точно такой же вид имеет индикаторная система при сужении $GL(v+1)/GL(v-1)$. В этом случае мы можем производить сужение не сразу, а в два этапа, вставляя между данными группами еще одну подгруппу, изоморфную $GL(v)$.

Для того чтобы получить соответствие с нашей задачей, мы рассматриваем неприводимое представление группы $GL(v+1)$ с сигнатурой $(m_1, m_2, \dots, m_v, 0)$, $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_v \geq 0$, где m_i — целые числа. Вместо $GL(v-1)$ рассматриваем подгруппу, изоморфную $GL(v-1) \times \Lambda^2$. Применяя результаты, полученные в § 66, находим следующий спектр сужения:

$$(m_1, m_2, \dots, m_v, 0) \downarrow_0 = \sum_{\substack{m_i \geq p_i \geq m_{i+1} \\ p_i \geq q_i \geq p_{i+1}}} (q_1, q_2, \dots, q_{v-1} | s_q, s_v),$$

где индекс 0 означает сужение на указанную подгруппу и s_1, s_2 — целые числа, входящие в определение характера $\lambda_1^{s_1}\lambda_2^{s_2}$ группы Λ^2 . При этом мы имеем

$$s_p = \sum_{k=1}^v m_k - \sum_{i=1}^v p_i, \quad s_q = \sum_{i=1}^v p_i - \sum_{j=1}^{v-1} q_j$$

согласно замечанию, сделанному в конце § 66. Теперь для перехода к нашему случаю достаточно положить $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda^{-1}$, после чего характер $\lambda_1^{s_1}\lambda_2^{s_2}$ переходит в $\lambda^{s_1-s_2}$. В результате получаем набор сигнатур, указанный в условиях теоремы. Теорема доказана.

Пользуясь полученным результатом, можно выписать в пространстве \mathfrak{X}_α естественный базис, аналогичный базису Гельфанд — Цейтлина. Этот базис состоит из векторов e_{pq} , где

$$p = \begin{vmatrix} p_{1v} & p_{2v} & p_{3v} & \cdots & p_{vv} \\ p_{1, v-1} & p_{2, v-1} & \cdots & p_{v-1, v-1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \\ & & p_{11} & & \end{vmatrix},$$

$$q = \begin{vmatrix} q_{1v} & q_{2v} & q_{3v} & \cdots & q_{vv} \\ q_{1, v-1} & q_{2, v-1} & \cdots & q_{v-1, v-1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \\ & & q_{11} & & \end{vmatrix}$$

и где целочисленные параметры p_{ik}, q_{jk} подчиняются следующим ограничениям: $p_{ik} \geq q_{i, k-1} \geq p_{i+1, k}$, $q_{ii} \geq p_{i, i-1} \geq q_{i+1, i}$, причем для общности записи положено $q_{iv} = m_v$ и символ $q_{l, l+1}$ заменяется нулем. Интерпретация этих векторов как старших векторов цепочки вложенных подгрупп очевидна.

Замечание 1. Как видно из теоремы 4, спектр сужения $Sp(n)/Sp(n-2)$ не простой, т. е. возможны кратности, большие единицы. То же верно при замене $Sp(n-2)$ на $Sp(n-2) \times \Lambda$.

Замечание 2. Положение не улучшится, если вместо $Sp(n-2)$ рассматривать подгруппу, изоморфную $Sp(n-2) \times Sp(2)$. В этом случае к индикаторной

системе добавится еще одно уравнение:

$$\left(z_{1v} \frac{\partial}{\partial z_{1,v+1}} + z_{2v} \frac{\partial}{\partial z_{2,v+1}} + \dots + \frac{\partial}{\partial z_{v,v+1}} \right) f = 0.$$

Такая же система уравнений встречается при рассмотрении тензорного произведения $\mathbf{d}_2^m \otimes d(\beta)$, где \mathbf{d}_2 — бивектор и β — произвольная сигнатура группы $GL(v+1)$. Нетрудно видеть, что и в этом случае встречаются кратные точки спектра.

В этом случае, в отличие от $SL(n)$, $SO(n)$, мы уже не можем разделить векторы базиса с помощью собственных значений операторов Казимира вложенных подгрупп.

§ 131. Тензорное произведение двух неприводимых представлений .

Эта задача уже была рассмотрена нами для группы $SL(n)$. Ее обобщение на произвольную комплексную полупростую (или редуктивную) группу Ли рассматривается почти буквально так же.

Рассмотрим группу $G \times G$, составляемую из всех матриц вида

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}, \quad a, b \in G.$$

Всякое неприводимое представление этой группы задается сдвоенной сигнатурой (α, β) , где α, β — сигнатуры группы G . Реализуем группу G как «диагональ» в $G \times G$, состоящую из матриц

$$\begin{vmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{vmatrix}, \quad g \in G.$$

Тогда сужение $d(\alpha, \beta)|_G$ совпадает с тензорным произведением $d(\alpha) \otimes d(\beta)$.

Реализуя данное представление в классе функций на $Z \times Z$, мы используем следующее очевидное разложение:

$$\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix}, \quad z = xy^{-1},$$