системе добавится еще одно уравнение:

$$\left(z_{1\nu}\frac{\partial}{\partial z_{1,\,\nu+1}}+z_{2\nu}\frac{\partial}{\partial z_{2,\,\nu+1}}+\ldots+\frac{\partial}{\partial z_{\nu,\,\nu+1}}\right)f=0.$$

Такая же система уравнений встречается при рассмотрении тензорного произведения $\boldsymbol{d}_2^m\otimes d(\beta)$, где $\boldsymbol{d}_2$ — бивектор и β — произвольная сигнатура группы $\mathrm{GL}(\nu+1)$. Нетрудно видеть, что и в этом случае встречаются кратные точки спектра.

В этом случае, в отличие от $\mathrm{SL}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, мы уже не можем разделить векторы базиса с помощью собственных значений операторов Казимира вложенных подгрупп.

§ 131. Тензорное произведение двух неприводимых представлений

Эта задача уже была рассмотрена нами для группы $\mathrm{SL}(n)$. Ее обобщение на произвольную комплексную полупростую (или редуктивную) группу Ли рассматривается почти буквально так же.

Рассмотрим группу $G\times G$, составляемую из всех матриц вида

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}, \qquad a,\ b\in G.$$

Всякое неприводимое представление этой группы задается сдвоенной сигнатурой (α,β), где α, β — сигнатуры группы G. Реализуем группу G как «диагональ» в $G\times G$, состоящую из матриц

$$\begin{Vmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{Vmatrix}, \qquad g\in G.$$

Тогда сужение $d(\alpha,\beta)\,|_G$ совпадает с тензорным произведением $d(\alpha)\otimes d(\beta)$.

Реализуя данное представление в классе функций на $Z\times Z$, мы используем следующее очевидное разложение:

$$\begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} z & 0 \\ 0 & e \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{Vmatrix}, \qquad z=xy^{-1},$$

для введения параметров в эту группу. Здесь x, y, z — произвольные матрицы из Z и e — единица в группе Z. Искомые Z-инварианты зависят только от z. Заметим, что умножение слева на матрицу с компонентами x_0, y_0 приводит к преобразованию

$$z \to x_0 z y_0^{-1}, \qquad x_0,\ y_0 \in Z,$$

в классе параметров z. Отсюда следует, что искомая индикаторная система в классе функций $f(z)$ имеет вид объединения двух индикаторных систем I_α, $\hat{I}_\beta$, где I_α — индикаторная система пространства $\mathfrak{R}_\alpha$ и $\hat{I}_\beta$ получается из индикаторной системы I_β заменой z на z^{-1}.

Сформулируем полученный результат более подробно. Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — пространство всех Z-инвариантов, имеющих вид $f(x, y) = f(z)$, т. е. зависящих только от $z = xy^{-1}$. Тогда мы имеем:

1) $\Omega_{\alpha\beta} \subset \mathfrak{R}_\alpha$,

2) $\Omega_{\alpha\beta} \subset \hat{\mathfrak{R}}_\beta$.

Здесь шляпка означает замену каждой функции $f(z)$ на $f(z^{-1})$. Условие 2) удобнее сформулировать следующим образом. Выпишем индикаторную систему I_β:

$$\mathscr{D}_i^{l_i+1} f(z) = 0.$$

Замена z на z^{-1} равносильна тому, что операторы левого сдвига $\mathscr{D}_i$ заменяются (с точностью до знака) операторами правого сдвига, которые обозначим X_i:

$$X_i^{l_i+1} f(z) = 0.$$

Но операторы правого сдвига являются инфинитезимальными операторами самого представления $d(\alpha)$. В результате получаем, что имеет место

Теорема 5. *Пусть G — полупростая связная комплексная группа Ли и $d(\alpha)$, $d(\beta)$ — два ее неприводимых представления. Пусть V_μ^α — весовое подпространство в $d(\alpha)$ с весом μ и $V_\mu^\alpha(\beta)$ — подпространство в V_μ^α, состоящее из всех решений системы уравнений*

$$X_i^{l_i+1} f = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

где X_i — *инфинитезимальный оператор* $d(\alpha)$, *отвечающий корневому вектору* e_{ω_i} *с простым корнем* ω_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, *и* l_i — *параметры сигнатуры* β: $l_i = 2(\beta, \omega_i)/(\omega_i, \omega_i)$. *Тогда имеет место тождество*

$$m_\gamma(\alpha, \beta) = \dim V_\mu^\alpha(\beta), \qquad \mu = \gamma - \beta,$$

для кратности $m_\gamma(\alpha, \beta)$, *с которой неприводимое представление* $d(\gamma)$ *содержится в тензорном произведении* $d(\alpha) \otimes d(\beta)$.

Доказательство. Вектор $f \in \Omega_{\alpha\beta}$ как элемент пространства $\mathfrak{R}_\alpha$ имеет вес μ, определяемый из уравнения

$$\alpha(\delta) f(\delta^{-1} z \delta) = \mu(\delta) f(z).$$

Тот же вектор как элемент пространства $\mathfrak{R}_\alpha \otimes \mathfrak{R}_\beta$ имеет вес γ, определяемый из уравнения

$$\alpha(\delta)\beta(\delta) f(\delta^{-1} z \delta) = \gamma(\delta) f(z).$$

Переходя к аддитивной записи, получаем, что $\mu + \beta = \gamma$. Теорема доказана.

Следствие. $m_\gamma(\alpha, \beta) \leqslant n_{\gamma-\beta}^{(\alpha)}$, *где* $n_\mu^{(\alpha)}$ — *кратность веса* μ *в представлении* $d(\alpha)$.

Если G — классическая группа, то при помощи теоремы 5 нетрудно, как и в случае $\mathrm{SL}(n)$, рассмотренном выше, получить простой алгоритм для вычисления спектральной формулы. При этом, как и в случае $\mathrm{SL}(n)$, удобно использовать для характера χ_α аналог второй формулы Вейля [10].

§ 132. Сужения $\mathrm{SU}(m+n)/\mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(n)$ и $\mathrm{SU}(mn)/\mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(n)$

Заменяя каждую группу $\mathrm{SU}(r)$ ее комплексной оболочкой $\mathrm{SL}(r)$, мы можем использовать обычную схему Z-инвариантов.

Заметим, что индикаторные системы в этих задачах выписываются легко, но найти их общее решение довольно сложно. Поэтому мы рассмотрим подробно лишь представление $d(\alpha) = d_1^p$, которое является симметризованной степенью вектора. Используя вторую формулу