где X_i — *инфинитезимальный оператор* $d(\alpha)$, *отвечающий корневому вектору* e_{ω_i} *с простым корнем* ω_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, *и* l_i — *параметры сигнатуры* β: $l_i = 2(\beta, \omega_i)/(\omega_i, \omega_i)$. *Тогда имеет место тождество*

$$m_\gamma(\alpha, \beta) = \dim V_\mu^\alpha(\beta), \qquad \mu = \gamma - \beta,$$

для кратности $m_\gamma(\alpha, \beta)$, *с которой неприводимое представление* $d(\gamma)$ *содержится в тензорном произведении* $d(\alpha) \otimes d(\beta)$.

Доказательство. Вектор $f \in \Omega_{\alpha\beta}$ как элемент пространства $\mathfrak{R}_\alpha$ имеет вес μ, определяемый из уравнения

$$\alpha(\delta) f(\delta^{-1} z \delta) = \mu(\delta) f(z).$$

Тот же вектор как элемент пространства $\mathfrak{R}_\alpha \otimes \mathfrak{R}_\beta$ имеет вес γ, определяемый из уравнения

$$\alpha(\delta)\beta(\delta) f(\delta^{-1} z \delta) = \gamma(\delta) f(z).$$

Переходя к аддитивной записи, получаем, что $\mu + \beta = \gamma$. Теорема доказана.

Следствие. $m_\gamma(\alpha, \beta) \leqslant n_{\gamma-\beta}^{(\alpha)}$, *где* $n_\mu^{(\alpha)}$ — *кратность веса* μ *в представлении* $d(\alpha)$.

Если G — классическая группа, то при помощи теоремы 5 нетрудно, как и в случае $\mathrm{SL}(n)$, рассмотренном выше, получить простой алгоритм для вычисления спектральной формулы. При этом, как и в случае $\mathrm{SL}(n)$, удобно использовать для характера χ_α аналог второй формулы Вейля [10].

§ 132. Сужения $\mathrm{SU}(m+n)/\mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(n)$ и $\mathrm{SU}(mn)/\mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(n)$

Заменяя каждую группу $\mathrm{SU}(r)$ ее комплексной оболочкой $\mathrm{SL}(r)$, мы можем использовать обычную схему Z-инвариантов.

Заметим, что индикаторные системы в этих задачах выписываются легко, но найти их общее решение довольно сложно. Поэтому мы рассмотрим подробно лишь представление $d(\alpha) = d_1^p$, которое является симметризованной степенью вектора. Используя вторую формулу

Вейля (§ 75), мы можем свести общий случай к этому частному случаю.

1° Сужение $SL(m+n)/SL(m)\times SL(n)$. Запишем $(m+n)$-мерный вектор-строку в виде $x=(x', x'')$, где x' — m-мерная строка и x'' — n-мерная строка. Преобразования группы $G^0\approx SL(m)\times SL(n)$ сводятся к независимым унимодулярным преобразованиям векторов x', x''. Рассматривая только преобразования корневой подгруппы $Z^0\approx Z(m)\times Z(n)$, мы можем привести вектор x к виду*) $x^0=(x_1'e_1', x_1''e_1'')$, где x_1', x_1'' — первые координаты векторов x', x'' и e_1', e_1'' — соответствующие базисные векторы. Отсюда ясно, что в представлении $\boldsymbol{d}_1^p$ старшими векторами являются только одночлены:

$$\omega_{p'p''}=(x_1')^{p'}(x_1'')^{p''}, \qquad p'+p''=p.$$

Здесь p', p'' — неотрицательные целые числа. Если λ', λ'' — диагональные преобразования из $SL(m)$, $SL(n)$ соответственно, то вектору $\omega_{p'p''}$ соответствует вес

$$\alpha_{p'p''}=\lambda_1'^{p'}\lambda_1''^{p''}=\Delta_1'^{p'}\Delta_1''^{p''}.$$

Здесь λ_1', λ_1'' — первые собственные значения матриц λ', λ'' и Δ_1', Δ_1'' — соответствующие диагональные миноры первого порядка. Заменяя каждый минор Δ_1', Δ_1'' соответствующим символом представления $\boldsymbol{d}_1'$, $\boldsymbol{d}_1''$, получаем следующую спектральную формулу:

$$\boldsymbol{d}_1^p\big|_{G^0}=\sum_{k=0}^{p}\boldsymbol{d}_1'^{p-k}\boldsymbol{d}_1''^{k}. \qquad (*)$$

Здесь $\boldsymbol{d}_1'^{p'}$ — симметризованная степень вектора для $SL(m)$ (сигнатура $(p', 0, 0, \ldots, 0)$) и $\boldsymbol{d}_1''^{p''}$ — симметризованная степень вектора для $SL(n)$ (сигнатура $(p'', 0, 0, \ldots, 0)$). Иначе говоря,

$$(p, 0, 0, \ldots, 0)\big|_{G^0}=\sum_{p'+p''=p}(p', 0, 0, \ldots, 0|p'', 0, 0, \ldots, 0).$$

---

*) При условии, что $x_1'\neq 0$, $x_1''\neq 0$; однако это условие в классе полиномов несущественно.

Здесь вертикальная черта в правой части разделяет сигнатуры $\mathrm{SL}(m)$ и $\mathrm{SL}(n)$ в сигнатуре группы G^0.

2° Сужение $\mathrm{SL}(mn)/\mathrm{SL}(m)\times\mathrm{SL}(n)$. Условимся считать, что $m\geqslant n$. Разобьем вектор-строку x размерности mn на n частей размерности m: $x=(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$. Подгруппа, изоморфная $\mathrm{SL}(m)$, подвергает все эти строки $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ одному и тому же унимодулярному преобразованию. Назовем эту группу *внутренней* группой и обозначим G'_m. Подгруппа, изоморфная $\mathrm{SL}(n)$, подвергает унимодулярному преобразованию символы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$:

$$x^{(i)}\to\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^{(j)}.$$

Назовем эту группу *внешней* группой и обозначим G''_n. Подгруппа G^0 является прямым произведением $G'_m\times G''_n$. Расположим теперь строки $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ в виде следующей прямоугольной матрицы:

$$x=\left\|\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_{m-1}^{(1)} & x_m^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_{m-1}^{(2)} & x_m^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_{m-1}^{(n)} & x_m^{(n)} \end{matrix}\right\|.$$

Нам будет удобно считать, что повышающие преобразования внутренней группы G'_m задаются верхними треугольными матрицами, а повышающие преобразования внешней группы G''_n — нижними треугольными матрицами. Тогда всевозможные повышающие операторы группы G^0 действуют по правилу

$$x\to z'_n x z_m,$$

где z_n — произвольная матрица из $\mathrm{Z}(n)$, z_m — произвольная матрица из $\mathrm{Z}(m)$ и штрих означает транспонирование. Дополняя матрицу x произвольными строками до квадратной матрицы $m\times m$, мы можем использовать разложение Гаусса, из которого очевидно, что всякий искомый Z^0-инвариант является линейной комбина-

цией одночленов

$$\omega_{p_1 p_2 \ldots p_n} = \omega_1^{p_1} \omega_2^{p_2} \ldots \omega_n^{p_n},$$

где ω_i — i-й главный диагональный минор матрицы x, составленный из первых i строк и первых i столбцов, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть λ', λ'' — диагональные преобразования из внутренней и внешней группы соответственно. Тогда, очевидно, одночлен $\omega_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ является весовым с весом

$$\alpha_{p_1 p_2 \ldots p_n} = \left(\lambda_1'^{p_1} \lambda_2'^{p_2} \ldots \lambda_n'^{p_n}\right)\left(\lambda_1''^{p_1} \lambda_2''^{p_2} \ldots \lambda_n''^{p_n}\right).$$

Для того чтобы такой вес являлся старшим весом группы G^0, необходимо, чтобы числа p_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, были целыми неотрицательными. Расширяя SL(p) до GL(p) и учитывая, что все рассматриваемые представления реализуются в классе контравариантных тензоров, получаем также, что p_n является целым неотрицательным числом*). В результате получаем следующую спектральную формулу:

$$\boldsymbol{d}_1^p \big|_{G^0} = \sum_{p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = p} \left(\boldsymbol{d}_1'^{p_1} \boldsymbol{d}_2'^{p_2} \ldots \boldsymbol{d}_n'^{p_n}\right)\left(\boldsymbol{d}_1''^{p_1} \boldsymbol{d}_2''^{p_2} \ldots \boldsymbol{d}_n''^{p_n}\right). \tag{**}$$

Здесь $\boldsymbol{d}_i'$, $\boldsymbol{d}_i''$ — обычные образующие (i-векторы) в полугруппе неприводимых представлений G_m', G_n'' соответственно. Условие $p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = p$ вытекает из вычисления степени однородности одночлена $\omega_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ (эта степень должна равняться p). Иная форма записи:

$$d(p, 0, 0, \ldots, 0)\big|_{G^0} =$$
$$= \sum_{\substack{q_1 + q_2 + \ldots + q_n = p \\ q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n \geqslant 0}} d(q_1, q_2, \ldots, q_n, 0, 0, \ldots, 0 \,|\, q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Здесь вертикальная черта разделяет сигнатуры G_m', G_n''. Числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$ должны быть целыми.

---

*) Все эти результаты очевидны также, если заметить, что $\omega_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ является полиномом только при условии, что числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ являются целыми неотрицательными. (Это следует хотя бы из рассмотрения тензоров для GL(n), § 51.)

В заключение напомним вторую формулу Вейля:

$$d(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{d}_1^{m_1} & \boldsymbol{d}_1^{m_1+1} & \ldots & \boldsymbol{d}_1^{m_1+(n-1)} \\ \boldsymbol{d}_1^{m_2-1} & \boldsymbol{d}_1^{m_2} & \ldots & \boldsymbol{d}_1^{m_2+(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \boldsymbol{d}_1^{m_n-(n-1)} & \boldsymbol{d}_1^{m_n-(n-2)} & \ldots & \boldsymbol{d}_1^{m_n} \end{vmatrix}^{\otimes}.$$

Для применения этой формулы к нашим задачам заменяем n на $m+n$ и подставляем в правую часть вместо каждого члена $\boldsymbol{d}_1^p$ его сужение на G^0, даваемое формулой (*) или (**).

Заметим, что если $m_{k+1} = m_{k+2} = \ldots = m_n = 0$, то этот детерминант (в правой части формулы Вейля) можно заменить его усечением, составленным из первых k строк и первых k столбцов.

Пример. $\alpha = (2, 1, 0, 0, 0, 0)$ для группы $\mathrm{SU}(6)$. Полагая $G^0 \approx \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2)$, находим

$$d(\alpha)|_{G^0} = \boldsymbol{d}_1'^3 \boldsymbol{d}_1'' + \boldsymbol{d}_1' \boldsymbol{d}_2' \boldsymbol{d}_1''^3 + \boldsymbol{d}_1' \boldsymbol{d}_2' \boldsymbol{d}_1'' + \boldsymbol{d}_1''.$$

§ 133. Сужение $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$

В этом параграфе будет рассмотрен лишь частный случай $n = 3$ *). Другой частный случай $\left(d(\alpha) = \boldsymbol{d}_1^m\right.$ с произвольным $\left.n\right)$ будет рассмотрен в следующем параграфе **). Заметим, что задача, которая здесь рассматривается, относится к классу «нерегулярных» вложений.

Используя аналитическое продолжение, мы приходим к задаче сужения G/G^0, где $G = \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$ и $G^0 = \mathrm{SO}(n, \boldsymbol{C})$. В дальнейшем полагается $n = 3$. Ортогональная группа G^0 сохраняет квадратичную форму $2x_{-1}x_{+1} + x_0^2$. Подгруппа Z^0 состоит из матриц

$$z_0 = \begin{Vmatrix} 1 & t & -t^2/2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

---

*) При изложении этого материала в лекциях [21] была допущена ошибка. Автор пользуется случаем выразить благодарность И. А. Малкину, отметившему эту ошибку.

**) Отсюда ввиду второй формулы Вейля будет следовать также и общий случай.