В заключение напомним вторую формулу Вейля:

$$d(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{d}_1^{m_1} & \boldsymbol{d}_1^{m_1+1} & \ldots & \boldsymbol{d}_1^{m_1+(n-1)} \\ \boldsymbol{d}_1^{m_2-1} & \boldsymbol{d}_1^{m_2} & \ldots & \boldsymbol{d}_1^{m_2+(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \boldsymbol{d}_1^{m_n-(n-1)} & \boldsymbol{d}_1^{m_n-(n-2)} & \ldots & \boldsymbol{d}_1^{m_n} \end{vmatrix}^{\otimes}.$$

Для применения этой формулы к нашим задачам заменяем n на $m+n$ и подставляем в правую часть вместо каждого члена $\boldsymbol{d}_1^p$ его сужение на G^0, даваемое формулой (*) или (**).

Заметим, что если $m_{k+1} = m_{k+2} = \ldots = m_n = 0$, то этот детерминант (в правой части формулы Вейля) можно заменить его усечением, составленным из первых k строк и первых k столбцов.

Пример. $\alpha = (2, 1, 0, 0, 0, 0)$ для группы $\mathrm{SU}(6)$. Полагая $G^0 \approx \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2)$, находим

$$d(\alpha)|_{G^0} = \boldsymbol{d}_1'^3 \boldsymbol{d}_1'' + \boldsymbol{d}_1' \boldsymbol{d}_2' \boldsymbol{d}_1''^3 + \boldsymbol{d}_1' \boldsymbol{d}_2' \boldsymbol{d}_1'' + \boldsymbol{d}_1''.$$

§ 133. Сужение $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$

В этом параграфе будет рассмотрен лишь частный случай $n = 3$ *). Другой частный случай $\left(d(\alpha) = \boldsymbol{d}_1^m\right.$ с произвольным $\left.n\right)$ будет рассмотрен в следующем параграфе **). Заметим, что задача, которая здесь рассматривается, относится к классу «нерегулярных» вложений.

Используя аналитическое продолжение, мы приходим к задаче сужения G/G^0, где $G = \mathrm{SL}(n, \boldsymbol{C})$ и $G^0 = \mathrm{SO}(n, \boldsymbol{C})$. В дальнейшем полагается $n = 3$. Ортогональная группа G^0 сохраняет квадратичную форму $2x_{-1}x_{+1} + x_0^2$. Подгруппа Z^0 состоит из матриц

$$z_0 = \begin{Vmatrix} 1 & t & -t^2/2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

---

*) При изложении этого материала в лекциях [21] была допущена ошибка. Автор пользуется случаем выразить благодарность И. А. Малкину, отметившему эту ошибку.

**) Отсюда ввиду второй формулы Вейля будет следовать также и общий случай.

Дополнительное многообразие Z' нам будет удобно параметризировать следующим образом:

$$z' = \begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \beta - \alpha^2/2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Перемножая эти матрицы, получаем произвольный элемент группы Z:

$$z = z'z_0 = \begin{Vmatrix} 1 & \alpha + t & \beta - \dfrac{(\alpha+t)^2}{2} \\ 0 & 1 & \alpha - t \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, α, β, t являются параметрами в группе Z. Формулы $\alpha = \frac{1}{2}(z_{12} + z_{23})$, $\beta = z_{13} + \frac{z_{12}^2}{2}$, $t = \frac{1}{2}(z_{12} - z_{23})$ выражают эти параметры через элементы матрицы z. Напомним, что группа $Z = Z(3)$ имеет два главных сдвига. Первый из них задается формулами

$$z_{12} \to z_{12} + \varepsilon, \quad z_{13} \to z_{13} + \varepsilon z_{23}, \quad z_{23} \to z_{23},$$

откуда (с точностью до малых второго порядка по ε) мы имеем в параметрах α, β, t

$$\alpha \to \alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \beta \to \beta + 2\varepsilon\alpha, \qquad t \to t + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда возникает инфинитезимальный оператор $\mathscr{D}_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + 2\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}$. Точно так же, рассматривая второй главный сдвиг, получаем оператор $\mathscr{D}_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}$. Заметим теперь, что искомые Z^0-инварианты не зависят от t. Следовательно, в классе этих полиномов мы имеем следующие два оператора:

$$\mathscr{D}_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + 2\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}, \qquad \mathscr{D}_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}.$$

В частности, второе индикаторное уравнение сводится к ограничению на степень α.

Замечание. Может показаться странным, что нарушена симметрия между вектором и бивектором. Однако замена переменных $\gamma = \beta - 2\alpha^2$ приводит наши операторы к виду

$$\mathscr{D}_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}, \quad \mathscr{D}_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha} - 2\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}.$$

Первое индикаторное уравнение сводится теперь при новом выборе переменных к ограничению на старшую степень α.

Мы можем упростить решение индикаторной системы, если сразу будем искать только весовые решения. Заметим, что группа D^0 содержит лишь один мультипликативный параметр λ: $\delta_{11} = \lambda$, $\delta_{22} = 1$, $\delta_{33} = \lambda^{-1}$. Произвольный вес мы запишем в виде λ^k. Переменные α, β условимся рассматривать как мультипликаторы в пространстве представления. Иначе говоря, всякий искомый старший вектор запишем в виде

$$f = f(\alpha, \beta) f^0,$$

где $f^0(z) \equiv 1$ — старший вектор исходного представления группы G. Нетрудно видеть*), что мультипликатору α отвечает вес λ^{-1} и мультипликатору β — вес λ^{-2}. Отсюда следует, что всякий весовой мультипликатор $f(\alpha, \beta)$ имеет вес λ^k, где k неположительно. Условимся такой мультипликатор называть *четным* или *нечетным* в зависимости от четности или нечетности k.

Исходное представление группы G запишем в виде $\boldsymbol{d}_1^{r_1}\boldsymbol{d}_2^{r_2}$ ($\boldsymbol{d}_1$ — вектор, $\boldsymbol{d}_2$ — бивектор). Рассмотрим отдельно четные и нечетные мультипликаторы.

1° Четные мультипликаторы. Всякий четный мультипликатор разлагается только по β, α^2 и, следовательно, может быть записан как полином от β, γ, где γ — введенная выше вспомогательная переменная. Пусть n_1, n_2 — старшие степени этого полинома по переменным β, γ. Поскольку $\beta = \gamma + 2\alpha^2$ и первое индикаторное уравнение в переменных α, γ имеет вид

*) Напомним (§ 128), что вес μ мультипликатора $f(z)$ определяется по формуле $f(\delta^{-1}z\delta) = \mu(\delta) f(z)$.

$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{r_1+1} f = 0$, то мы получаем ограничения $2n_1 \leqslant r_1$. Точно так же соотношение $\gamma = \beta - 2\alpha^2$ и второе индикаторное уравнение в переменных α, β приводят к ограничению $2n_2 \leqslant r_2$. В результате получаем

Правило 1. *Всякий четный мультипликатор является полиномом от переменных*

$$\beta = z_{13} + \frac{z_{12}^2}{2}, \quad \gamma = \hat{z}_{13} - \frac{z_{23}^2}{2},$$

где $\hat{z}_{13} = z_{13} - z_{12}z_{23}$, *степени не выше* $[r_1/2]$ *по* β *и степени не выше* $[r_2/2]$ *по* γ.

2° Нечетные мультипликаторы. Всякий нечетный мультипликатор мы можем представить в виде $f(\alpha, \beta) = \alpha f_1(\alpha, \beta)$, где $f_1(\alpha, \beta)$ — четный мультипликатор. Повторяя предыдущие рассуждения, заключаем, что имеет место

Правило 2. *Всякий нечетный мультипликатор может быть получен умножением переменной*

$$\alpha = \frac{z_{12} + z_{23}}{2}$$

на полином от β, γ *степени не выше* $\left[\frac{r_1 - 1}{2}\right]$ *по* β *и степени не выше* $\left[\frac{r_2 - 1}{2}\right]$ *по* γ.

Для вычисления кратности $n(k)$, с которой входит мультипликатор веса λ^{-k}, достаточно найти число одночленов вида $\omega_{ij} = \beta^i\gamma^j$, $i + j = k/2$ (при четном k) или число одночленов вида $\theta_{ij} = \alpha\omega_{ij}$, $i + j = (k-1)/2$ (при нечетном k). Здесь i, j — неотрицательные целые числа, ограниченные сверху значениями $i_{\max} = [r_1/2]$, $j_{\max} = [r_2/2]$ (при четном k) или $i_{\max} = [(r_1 - 1)/2]$, $j_{\max} = [(r_2 - 1)/2]$ (при нечетном k). Искомая кратность $n(k)$ равняется числу целочисленных точек (обе координаты целочисленны), лежащих на линии $i + j = k/2$ или $i + j = (k-1)/2$ внутри и на границе прямоугольника $0 \leqslant i \leqslant i_{\max}$, $0 \leqslant j \leqslant j_{\max}$. Так, при четном k график кратностей имеет вид, изображенный на рис. 7. Параметры этой трапеции легко вычисляются из указанного выше прямоугольника. Точно так же при нечетном k график имеет вид трапеции с вертикальной

осью симметрии. При этом общий график кратностей получается наложением двух указанных трапеций.

Символически удобно использовать «суммарный мультипликатор» $M = \sum n(k)\lambda^{-k}$. Искомая спектральная формула получается применением этого мультипликатора к исходному старшему весу $\Delta_1^{r_1}\Delta_2^{r_2} = \lambda^{r_1+r_2}$:

$$\boldsymbol{d}_1^{r_1}\boldsymbol{d}_2^{r_2}\big|_{G^0} = M\lambda^{r_1+r_2}.$$

Здесь в правой части каждое слагаемое λ^m рассматривается как символ неприводимого представления группы SO(3) со старшим весом $m = r_1 + r_2 - k$. Выражение в правой части означает прямую сумму таких неприводимых представлений.

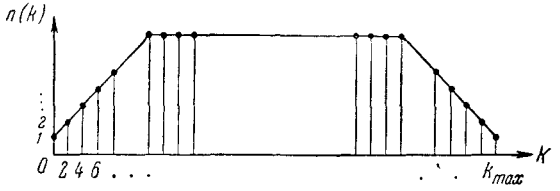

Рис. 7.

Пример 1. Положим $r_1 = 0$, $r_2 = 5$. В этом случае имеется три четных мультипликатора ω_{ij}: ω_{00}, ω_{01}, ω_{02}. Нечетные мультипликаторы отсутствуют. В результате

$$\boldsymbol{d}_2^5\big|_{G^0} = (1 + \lambda^{-2} + \lambda^{-4})\lambda^5 = \lambda^5 + \lambda^3 + \lambda.$$

Пример 2. Положим $r_1 = 1$, $r_2 = 5$. В этом случае имеются те же четные мультипликаторы, что и в предыдущем примере, и, кроме того, три нечетных мультипликатора $\theta_{ij} = \alpha\omega_{ij}$: θ_{00}, θ_{01}, θ_{02}. В результате

$$\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_2^5\big|_{G^0} = \lambda^6 + \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda.$$

Пример 3. Положим $r_1 = 4$, $r_2 = 4$. Четные мультипликаторы ω_{00}; ω_{10}, ω_{01}; ω_{20}, ω_{11}, ω_{02}; ω_{21}, ω_{12}; ω_{22}. Нечетные мультипликаторы: θ_{00}; θ_{10}, θ_{01}; θ_{11}. В результате

$$\boldsymbol{d}_1^4\boldsymbol{d}_2^4\big|_{G^0} = (\lambda^8 + 2\lambda^6 + 3\lambda^4 + 2\lambda^2 + \lambda^0) + (\lambda^7 + 2\lambda^5 + \lambda^3).$$

Нетрудно выписать также и общую формулу для кратностей. Однако результат гораздо более нагляден из графика и рассмотренных примеров.

§ 134. Сферические функции в n-мерном евклидовом пространстве

Как известно, теория сферических функций в трехмерном вещественном евклидовом пространстве тесно связана с гармоническими полиномами от трех переменных. Мы опишем краткую схему перенесения этой теории на произвольное число переменных*). Выбирая квадратичную форму в виде суммы квадратов, рассмотрим соответствующий оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Полином $p(\boldsymbol{x}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *гармоническим*, если $\Delta p(\boldsymbol{x}) = 0$.

Теорема 6. *Всякий полином $p(\boldsymbol{x}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть однозначно представлен в виде*

$$p = h_0 + r^2 h_1 + r^4 h_2 + \ldots$$

(конечная сумма), где $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ и h_0, h_1, h_2, ... — гармонические полиномы. Линейное пространство H_m всех однородных гармонических полиномов степени m является циклической оболочкой единственного полинома

$$\omega^m = (x + iy)^m$$

относительно группы вращений $\mathrm{SO}(n)$. Здесь x, y — проекции вектора $\boldsymbol{x}$ на два произвольных взаимно ортогональных направления.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что $x = x_1$, $y = x_2$. Введем в рассматриваемое n-мерное пространство E «картановские» координаты $x_{\pm k} = (x_{i_k} \pm i x_{j_k})$, $x_0 = \sqrt{2}\, x_{i_0}$, где (i_k, j_k) — разбиение индексов 1, 2, ..., n на пары (при четном n) с

*) При изложении этой схемы мы не пользуемся результатами общей теории, однако имеем в виду идею старшего вектора.