выражения сферических функций через полиномы Гегенбауэра. Такое выражение найдено иным путем в [14].

Замечание 1. Результаты ортогональности и полноты могут быть получены также как следствие глобальной теоремы, если использовать отображение $SO(n)$ на S, описанное в § 17.

Замечание 2. Поскольку в пространстве P_m действует представление d_1^m группы $SU(n)$, то вся теория, изложенная в этом параграфе, может быть интерпретирована как сужение $d_1^m|_{G^0}$, где $G^0 = SO(n)$ *).

§ 135. О представлениях группы движений n-мерного евклидова пространства

В этом параграфе мы рассмотрим нетривиальные примеры полуприводимых представлений. Если расширить ортогональную группу $S = SO(n)$ до группы движений n-мерного евклидова пространства E, то такие представления естественно возникают в классе полиномов над E. Мы покажем, что метод старших векторов дает и в этом случае эффективный способ исследования представлений.

Определим группу G как совокупность всевозможных пар (s, t), $s \in S$, $t \in T$, где $S = SO(n, \boldsymbol{C})$ и T изоморфно E. Преобразования группы G в пространстве E определяются формулой

$$gx = sx + t.$$

Элементам вида $(s, 0)$ отвечают повороты вокруг начала координат, элементам вида (e, t) — трансляции в E. Соответствующие подгруппы мы отождествляем с S и T. Закон умножения в G определяется очевидным образом. Группа G есть связная компонента единицы в группе всех движений пространства E.

Условимся рассматривать x как вектор-строку и записывать матрицу g справа от x. Пусть $\mathscr{P}$ — пространство всех полиномов от x. Формула

$$U_g p(x) = p(xg)$$

*) Относительно обобщения этого результата см. сноску на стр. 596.

определяет в $\mathscr{P}$ представление группы G. Подпространство P_m всех однородных полиномов степени m не инвариантно относительно этого представления. Однако подпространство $\mathscr{P}_m$ всех полиномов степени $\leqslant m$ уже инвариантно относительно U_g.

Покажем, что представление в пространстве $\mathscr{P}_m$ не является вполне приводимым. Для примера рассмотрим случай $m = 1$. Имеем $\mathscr{P}_1 = P_0 + P_1$, где P_0 — одномерное подпространство, натянутое на вектор $p_0(x) \equiv 1$, и P_1 есть n-мерное подпространство линейных форм, которое мы можем отождествить с пространством E. Оба эти подпространства инвариантны и неприводимы относительно S. В то же время для группы T имеем

$$U_t p(x) = p(x + t).$$

Если $p(x)$ — линейная форма, то $p(x + t) = p(x) + p(t) p_0(x)$. Преобразования группы T в двумерном подпространстве $\{p(x), p_0(x)\}$ задаются неразложимой жордановой клеткой

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ p(t) & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда ясно, что представление группы G в пространстве $\mathscr{P}_1$ также неразложимо, т. е. не может быть представлено в виде прямой суммы двух представлений. Действительно, каждое из этих представлений должно быть также представлением подгруппы S, т. е. совпадать с одним из представлений в P_0 и P_1. Но подгруппа трансляций действует неразложимо в паре $\{P_0, P_1\}$.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Заметим, что P_m инвариантно относительно S. Согласно рассмотрениям предыдущего параграфа единственными старшими векторами в P_m являются векторы вида $x_1^k (x, x)^l$, $k + 2l = m$, где x_1 — координата вектора x относительно некоторого фиксированного базиса. Введем обозначение P_{lk} для циклической оболочки $(x, x)^l x_1^k$ относительно подгруппы S. Докажем, что имеет место

Теорема 8. *Условимся для подпространств P_{lk} использовать лексикографическую упорядоченность относительно пары (l, k). Тогда циклическая оболочка*

подпространства P_{lk} относительно группы G содержит все подпространства $P_{l'k'}$, подчиненные P_{lk}.

Доказательство. Пусть PQ означает линейную оболочку всех полиномов вида pq, $p \in P$, $q \in Q$. Докажем вначале, что имеет место

Лемма. *Подпространства P_1P_{lk} неприводимы относительно подгруппы S, за исключением $P_1P_{l1} = P_{l2} + P_{l+1,0}$.*

Доказательство леммы. Достаточно заметить, что умножение на P_1 отображает P_m на P_{m+1}: $P_1P_m = P_{m+1}$, и при четном m число неприводимых слагаемых не повышается, а при нечетном — повышается на единицу. При этом расщепляется именно P_1P_{l1}, поскольку среди линейных комбинаций $p(x)x_i(x, x)^l$, где $p(x)$ — линейная форма, содержится старший вектор $(x, x)^{l+1}$. Лемма доказана.

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Фиксируем старший вектор $\xi_0 = (x, x)^l x_1^k$ и разложим $U_t\xi_0$ по степеням параметров t. При этом степень однородности $m-1$ $(m = k + 2l)$ имеют только члены, линейные по t. Таких слагаемых только два:

$$kt_1x_1^{k-1}(x, x)^l + 2lx_1^k(t, x)(x, x)^{l-1}.$$

Здесь первое слагаемое является старшим вектором в $P_{l,k-1}$, в то время как второе слагаемое содержится в подпространстве $P_1P_{l-1,k}$, которое согласно лемме либо совпадает с $P_{l-1,k+1}$, либо распадается в сумму $P_{l-1,k+1} + P_{l,k-1} \pmod{\mathscr{P}_{m-2}}$. Следовательно, циклическая оболочка $G\xi_0$ относительно группы G имеет вид

$$G\xi_0 = P_{l-1,k+1} + P_{l,k-1} \pmod{\mathscr{P}_{m-2}}.$$

Заменяя (l, k) на $(l-1, k+1)$ или $(l, k-1)$, мы получаем шаг за шагом все подпространства $P_{l'k'}$, для которых $(l', k') \leqslant (l, k)$. Теорема доказана.

Результат теоремы 8 удобно выразить графически. Пусть Γ_{lk} — представление подгруппы S в подпространстве P_{lk}. Условимся, что стрелки, исходящие от символа Γ_{lk}, направлены в сторону тех подпространств $P_{l'k'}$, которые содержатся в циклической оболочке GP_{lk}. Тогда,

например, для представлений, содержащихся в $\mathscr{P}_5$, мы имеем

$$\begin{tikzcd}
\underline{m=5} & \underline{m=4} & \underline{m=3} & \underline{m=2} & \underline{m=1} & \underline{m=0} \\
\Gamma_{05} \arrow[r] & \Gamma_{04} \arrow[r] & \Gamma_{03} \arrow[r] & \Gamma_{02} \arrow[r] & \Gamma_{01} \arrow[r] & \Gamma_{00} \\
\Gamma_{13} \arrow[r] \arrow[ur] & \Gamma_{12} \arrow[r] \arrow[ur] & \Gamma_{11} \arrow[r] \arrow[ur] & \Gamma_{10} \arrow[ur] & & \\
\Gamma_{21} \arrow[r] \arrow[ur] & \Gamma_{20} \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Здесь номер m для каждого столбца ($m = k + 2l$) означает степень однородности. Циклическая оболочка каждого подпространства P_{lk} содержит все подпространства $P_{l'k'}$, символы которых расположены правее и выше символа Γ_{lk}, если движение «выше» понимать в смысле наклонных стрелок. В заключение докажем, что имеет место

Теорема 9. *Всякое инвариантное подпространство в пространстве $\mathscr{P}_m$ является циклической оболочкой некоторого набора подпространств P_{lk}.*

Доказательство. Пусть Q — инвариантное подпространство в $\mathscr{P}_m$ и Q_0 — его неприводимое инвариантное подпространство относительно S. Старший вектор в Q_0 обязательно имеет вид

$$\xi_0 = x_1^k \left(a_0\sigma^l + a_1\sigma^{l-1} + \ldots + a_l\sigma^0\right) = x_1^k f(\sigma),$$

где $\sigma = (x, x)$. Действительно, σ является инвариантом группы S, и потому сигнатура определяется только показателем k. Докажем, что Q содержит все векторы $\eta_i = x_1^k\sigma^{l-i}$, для которых $a_i \neq 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, l)$. В самом деле, циклическая оболочка $T\xi_0$ содержит вектор

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_n} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left\{\xi_0 (x + \tau e_1) - \xi_0 (x)\right\} = 2x_1^{k+1} f'(\sigma).$$

Здесь e_1 — первый базисный вектор в разложении $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Наше утверждение доказывается теперь индукцией по степени полинома $f(\sigma)$, поскольку $f'(\sigma)$ — полином меньшей степени. Следовательно, Q содержит вместе с каждым старшим вектором ξ_0 также все

его компоненты $(x, x)^l x_1^k$, входящие с ненулевыми коэффициентами. Но тогда, очевидно, Q содержит также соответствующие подпространства P_{lk} и является их циклической оболочкой. Теорема доказана.

Напомним, что согласно теореме 10 гл. XVI неприводимые представления группы G, по существу, не отличаются от неприводимых представлений подгруппы S. В то же время, как видно из рассмотрений этого параграфа, группа G имеет совершенно иные, «ступенчатые», структуры в классе приводимых представлений.

* * *

Как уже отмечено во введении к этой главе, здесь содержатся лишь фрагменты спектрального анализа конечномерных представлений. Одним из нерешенных в общем случае вопросов является вопрос о возможности разделения кратных точек весового спектра с помощью цепочки вложенных подгрупп. Представляет также несомненный практический интерес описание «понижающих» операторов неприводимого представления (см. § 68 для $\mathrm{SL}(n)$) и более подробное изучение тензорных произведений $d(\alpha) \otimes d(\beta)$.

Базис неприводимого представления $\mathrm{SO}(n)$ был построен И. М. Гельфандом и М. Л. Цейтлиным [73] в виде формальных схем с явным определением инфинитезимальных операторов на этих схемах. Аналогичный базис для $\mathrm{Sp}(n)$ был указан в статье [84]. Отдельные примеры §§ 132—134 рассматривались в курсе лекций [21]. Общая схема Z-инвариантов и теорема о тензорных произведениях излагаются согласно [84]; в этой же статье были рассмотрены полуприводимые представления группы движений n-мерного евклидова пространства.