разность которых целочисленна, мы будем называть *сигнатурой*. Таким образом, $e(\alpha) = e(p, q)$.

Как и в основном тексте (в случае конечномерных представлений), мы можем использовать разложения Гаусса и Ивасавы для получения иных моделей представления $e(\alpha)$. В частности, пусть $\mathfrak{U}$ — максимальная компактная подгруппа в группе G, порожденная компактной формой Вейля $K \subset X$. Пусть $\mathfrak{D}$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathfrak{U}$. Условие

$$\varphi(\gamma u) = \alpha(\gamma)\varphi(u), \qquad \gamma \in \Gamma, \quad u \ni \mathfrak{U},$$

выделяет замкнутое подпространство в пространстве $\mathfrak{D}$. Поскольку характер $\alpha(\gamma)$, $\alpha = (p, q)$, зависит только от целочисленной разности $\nu = p - q$, мы обозначим это подпространство символом $\mathfrak{D}_\nu$. Вектор ν мы будем называть *индексом сигнатуры* α. Представление $e(\alpha)$ может быть реализовано в пространстве $\mathfrak{D}_\nu$ с помощью известной формулы:

$$T_g\varphi(u) = \alpha(\varepsilon')\varphi(u_g), \qquad \varepsilon' \in E, \quad u_g \ni \mathfrak{U},$$

где элементы ε', u_g определяются из разложения Ивасавы $ug = \varepsilon'\zeta u_g$, $\zeta \in Z_-$. Заметим, что характер $\alpha(\varepsilon)$ зависит только от суммы $\rho = p + q$. Вектор ρ мы будем называть *показателем сигнатуры* α. Вектор ρ является произвольным вектором из H.

В несколько ином варианте определения элементарные представления были впервые введены в работе И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [68]. Наше определение следует статье [88].

§ 2. Пространство элементарного представления

Пространство $\mathfrak{D}$ является топологическим векторным пространством относительно топологии равномерной сходимости на $\mathfrak{U}$ функций со всеми производными. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{D}$ является метризуемым полным пространством, т. е. пространством Фреше. Более глубокую информацию о топологической природе $\mathfrak{D}$ мы получим, если разложим представление $e(\alpha)$ на мультиплеты относительно компактной подгруппы $\mathfrak{U}$.

Заметим, что сужение $e(\alpha)$ на $\mathfrak{U}$ сводится к правым сдвигам $R_u\varphi(x) = \varphi(xu)$ на группе $\mathfrak{U}$. Разложение этого представления на неприводимые хорошо известно и сводится к разложению функции $\varphi(u)$ в ряд Фурье по матричным элементам группы $\mathfrak{U}$. Однако существенно учесть бесконечную дифференцируемость функций $\varphi(u)$.

Пусть Δ — квадратичный оператор Казимира, порожденный правыми сдвигами на $\mathfrak{U}$ (оператор Лапласа — Бельтрами на $\mathfrak{U}$). Матричные элементы старшего веса λ являются собственными векторами оператора Δ с собственным значением $k(\lambda)$, причем $k(\lambda)$ является полиномом степени 2 относительно λ:

$$k(\lambda) = \lambda_i\lambda^i + c(\lambda)$$

(сумма по i от 1 до r), где λ_i, λ^i — взаимно дуальные координаты в алгебре H и $c(\lambda)$ — линейная форма от λ (см. § 126). Таким образом, $k(\lambda) \geqslant C\|\lambda\|$ для достаточно больших значений λ.

Из бесконечной дифференцируемости функции $\varphi(u)$ следует, что ее ряд Фурье сходится в среднем квадратичном с любым весом $(k(\lambda))^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\sum_{\lambda} \sum_{i, j} (k(\lambda))^n \left| c_{ij}^{\lambda} \right|^2 \omega(\lambda) < \infty,$$

где c_{ij}^{λ} — коэффициенты Фурье — Петера — Вейля функции $\varphi(u)$ и $\omega(\lambda)$ — квадрат нормы матричного элемента. Отсюда, как и в обычном анализе Фурье, следует, что ряд Фурье функции $\varphi(u)$ сходится к этой функции в топологии пространства $\mathfrak{D}$, т. е. равномерно вместе со всеми производными. Коэффициенты Фурье функции $\varphi(u)$ убывают быстрее любой степени $k(\lambda)$:

$$\left| c_{ij}^{\lambda} \right| \leqslant A_n (k(\lambda))^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда следует, что пространство $\mathfrak{D}$ изоморфно пространству Кёте быстро убывающих последовательностей ([115']). Согласно оценкам статьи [115'] легко находим, что пространство $\mathfrak{D}$ является *монтелевским* и *ядерным*.

Как мы знаем, мультиплет d_λ группы $\mathfrak{U}$ со старшим весом λ содержится в пространстве $\mathfrak{D}$ с кратностью $n_\lambda = \dim d_\lambda$. При этом нетрудно видеть, что на долю $\mathfrak{D}_\nu$ приходится $n_\lambda(\nu)$ таких мультиплетов, где $n_\lambda(\nu)$ — кратность веса ν в представлении d_λ. Тем самым определяется кратность вхождения d_λ в представление $e(\alpha)$.

В частности, минимальным из весов λ, для которых d_λ содержится в $\mathfrak{D}_\nu$, является вес $\lambda_0 = |\nu|$, где $|x|$ — доминантный вектор на орбите вектора x относительно группы Вейля (см. § 105). При этом $n_{\lambda_0}(\nu) = 1$, т. е. d_{λ_0} *содержится в* $\mathfrak{D}_\nu$ *однократно*.

§ 3. Дифференциал элементарного представления

Как следует из определения элементарного представления (§ 1), инфинитезимальные операторы группы G применимы к любому вектору из пространства представления $e(\alpha)$. Пусть $e(\alpha, x)$ — инфинитезимальный оператор представления $e(\alpha)$, отвечающий элементу $x \in X$. Полагая $e(\alpha, xy) = e(\alpha, x) e(\alpha, y)$, продолжаем дифференциал $e(\alpha, x)$ до представления универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{X}$. Элементы $e(\alpha, x)$, $x \in \mathfrak{X}$, являются полиномами от инфинитезимальных операторов группы G.

Поскольку при дифференцировании оператора T_g (§ 2) приходится дифференцировать экспоненту $\alpha(\varepsilon) = \exp(\rho - 2d, t)$, $\varepsilon = \exp t$, инфинитезимальные операторы $e(\alpha, x)$, $x \in X$, линейно зависят от показателя ρ сигнатуры α. Следовательно, также операторы $e(\alpha, x)$, $x \in \mathfrak{X}$, являются полиномами от вектора ρ.

Пусть $\mathscr{L}$ — линейная оболочка (множество конечных линейных комбинаций) матричных элементов группы $\mathfrak{U}$. Пусть $\mathscr{L}_\nu$ — пересечение $\mathscr{L}$ с $\mathfrak{D}_\nu$. Векторное пространство $\mathscr{L}_\nu$ мы будем называть *основным линеалом* в пространстве $\mathfrak{D}_\nu$. Покажем, что основной линеал инвариантен относительно дифференциала $e(\alpha, x)$, $x \in \mathfrak{X}$. Для этого достаточно рассматривать только элементы $x \in X$.