Из бесконечной дифференцируемости функции $\varphi(u)$ следует, что ее ряд Фурье сходится в среднем квадратичном с любым весом $(k(\lambda))^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\sum_{\lambda} \sum_{i, j} (k(\lambda))^n \left| c_{ij}^{\lambda} \right|^2 \omega(\lambda) < \infty,$$

где c_{ij}^{λ} — коэффициенты Фурье — Петера — Вейля функции $\varphi(u)$ и $\omega(\lambda)$ — квадрат нормы матричного элемента. Отсюда, как и в обычном анализе Фурье, следует, что ряд Фурье функции $\varphi(u)$ сходится к этой функции в топологии пространства $\mathfrak{D}$, т. е. равномерно вместе со всеми производными. Коэффициенты Фурье функции $\varphi(u)$ убывают быстрее любой степени $k(\lambda)$:

$$\left| c_{ij}^{\lambda} \right| \leqslant A_n (k(\lambda))^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда следует, что пространство $\mathfrak{D}$ изоморфно пространству Кёте быстро убывающих последовательностей ([115']). Согласно оценкам статьи [115'] легко находим, что пространство $\mathfrak{D}$ является *монтелевским* и *ядерным*.

Как мы знаем, мультиплет d_λ группы $\mathfrak{U}$ со старшим весом λ содержится в пространстве $\mathfrak{D}$ с кратностью $n_\lambda = \dim d_\lambda$. При этом нетрудно видеть, что на долю $\mathfrak{D}_\nu$ приходится $n_\lambda(\nu)$ таких мультиплетов, где $n_\lambda(\nu)$ — кратность веса ν в представлении d_λ. Тем самым определяется кратность вхождения d_λ в представление $e(\alpha)$.

В частности, минимальным из весов λ, для которых d_λ содержится в $\mathfrak{D}_\nu$, является вес $\lambda_0 = |\nu|$, где $|x|$ — доминантный вектор на орбите вектора x относительно группы Вейля (см. § 105). При этом $n_{\lambda_0}(\nu) = 1$, т. е. d_{λ_0} *содержится в* $\mathfrak{D}_\nu$ *однократно*.

§ 3. Дифференциал элементарного представления

Как следует из определения элементарного представления (§ 1), инфинитезимальные операторы группы G применимы к любому вектору из пространства представления $e(\alpha)$. Пусть $e(\alpha, x)$ — инфинитезимальный оператор представления $e(\alpha)$, отвечающий элементу $x \in X$. Полагая $e(\alpha, xy) = e(\alpha, x) e(\alpha, y)$, продолжаем дифференциал $e(\alpha, x)$ до представления универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{X}$. Элементы $e(\alpha, x)$, $x \in \mathfrak{X}$, являются полиномами от инфинитезимальных операторов группы G.

Поскольку при дифференцировании оператора T_g (§ 2) приходится дифференцировать экспоненту $\alpha(\varepsilon) = \exp(\rho - 2d, t)$, $\varepsilon = \exp t$, инфинитезимальные операторы $e(\alpha, x)$, $x \in X$, линейно зависят от показателя ρ сигнатуры α. Следовательно, также операторы $e(\alpha, x)$, $x \in \mathfrak{X}$, являются полиномами от вектора ρ.

Пусть $\mathscr{L}$ — линейная оболочка (множество конечных линейных комбинаций) матричных элементов группы $\mathfrak{U}$. Пусть $\mathscr{L}_\nu$ — пересечение $\mathscr{L}$ с $\mathfrak{D}_\nu$. Векторное пространство $\mathscr{L}_\nu$ мы будем называть *основным линеалом* в пространстве $\mathfrak{D}_\nu$. Покажем, что основной линеал инвариантен относительно дифференциала $e(\alpha, x)$, $x \in \mathfrak{X}$. Для этого достаточно рассматривать только элементы $x \in X$.

Действительно, пусть V^λ — линейная оболочка всех матричных элементов из $\mathscr{L}_\nu$ с фиксированным старшим весом λ. Пусть K — алгебра Ли подгруппы $\mathfrak{U}$. Если $x \in K$, то $e(\alpha, x) V^\lambda \subset V^\lambda$ по определению V^λ. С другой стороны, рассмотрим билинейную функцию $f(x, \xi) = e(\alpha, x)\xi$, $x \in X$, $\xi \in V^\lambda$, как элемент тензорного произведения $X \otimes V^\lambda$. Формула $e(\alpha, z) f(x, \xi) = f([z, x], \xi) + f(x, e(\alpha, z)\xi)$, $z \in K$, показывает, что $f(x, \xi)$ преобразуется алгеброй K по закону тензорного произведения $\pi \otimes d_\lambda$, где π — представление алгебры K в пространстве X, порожденное присоединенным представлением. Следовательно, $e(\alpha, x) V^\lambda \subset \sum V^{\lambda'}$, где λ' пробегает конечное семейство неприводимых компонент из тензорного произведения $\pi \otimes d_\lambda$.

При определении семейства элементарных представлений $e(\alpha)$ мы видели, формально говоря, что это семейство получается «аналитическим продолжением» (по сигнатуре) из семейства неприводимых конечномерных представлений $d_{\lambda\mu}$ группы G. Теперь мы можем придать этому утверждению более точный смысл. Рассматривая индикаторные системы представлений $d_{\lambda\mu}$, нетрудно показать (см. [88]), что пространство $V_{\lambda\mu}$ такого представления выделяется следующей системой уравнений:

$$X_{-i}^{\lambda_i+1} \varphi = 0, \quad X_{+i}^{\mu_i+1} \varphi = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

где $X_{\pm i}$ — инфинитезимальные операторы левого сдвига на $\mathfrak{U}$, отвечающие корневым векторам e_ω, $\omega = \pm\omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, в комплексной оболочке алгебры K. При этом $d_{\lambda\mu}$ действует в $\mathscr{L}_\nu$ только при $\lambda - \mu = \nu$. Отсюда следует, что каждое $\mathscr{L}_\nu$ является объединением возрастающего семейства своих подпространств $V_{\lambda\mu}$:

$$\mathscr{L}_\nu = \sum_{\lambda - \mu = \nu} V_{\lambda\mu}.$$

Фиксируем два произвольных матричных элемента e, $e' \in \mathscr{L}_\nu$ и рассмотрим функцию $f(\alpha) = (e(\alpha, x)e, e')$, где (φ, φ') — скалярное произведение в $L^2(\mathfrak{U})$. Поскольку $f(\alpha)$ является полиномом, $f(\alpha)$ вполне определяется своими значениями на дискретном семействе представлений $d_{\lambda\mu}$, $\lambda - \mu = \nu$. В этом смысле дифференциал $e(\alpha)$ является аналитическим продолжением семейства дифференциалов $d_{\lambda\mu}$.

Отметим простое, но важное следствие относительно операторов Казимира $e(\alpha, z)$, $z \in \mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ — центр алгебры $\mathfrak{X}$. Если e, e' — два матричных элемента из $\mathscr{L}_\nu$, то $(e(\alpha, z)e, e') = c(\alpha)\delta(e, e')$, где $\delta(e, e')$ — символ Кронекера для пары e, e' и $c(\alpha)$ — числовой полином от α. Действительно, эта формула верна для семейства $d_{\lambda\mu}$, но тогда и для произвольных $e(\alpha)$. Следовательно, оператор Казимира $e(\alpha, z)$ кратен единичному оператору для любого элементарного представления $e(\alpha)$.