§ 4. Вопросы неприводимости

Исследование элементарных представлений на неприводимость проводилось многими авторами, начиная с первоначальных работ И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [68], в которых исследовались унитарные представления «основной серии» для классических групп. Окончательное решение вопроса было получено в работе автора [88]. Поскольку в доказательстве используется сложная полиномиальная техника, мы ограничимся только формулировкой результатов.

Скажем, что сигнатура $\alpha = (p, q)$ имеет *вырождение по направлению корня* ω, если числа $p_\omega = 2(p, \omega)/(\omega, \omega)$, $q_\omega = 2(q, \omega)/(\omega, \omega)$ являются целыми ненулевыми одинакового знака (т. е. $p_\omega q_\omega > 0$). Скажем, что сигнатура α *вырождена*, если она имеет вырождение по направлению хотя бы одного корня. Результат исследования $e(\alpha)$ на неприводимость выражается следующей теоремой:

Элементарное представление $e(\alpha)$ топологически неприводимо тогда и только тогда, когда сигнатура α невырождена.

Оказывается также, что топологическая неприводимость $e(\alpha)$ равносильна алгебраической неприводимости дифференциала $e(\alpha, x)$, $x \in X$, в линеале $\mathscr{L}_\nu$. Кроме того, для неприводимых представлений $e(\alpha)$ выполняется следующий аналог теоремы Бернсайда: *всякий непрерывный линейный оператор в пространстве $\mathfrak{D}_\nu$ может быть слабо аппроксимирован линейными комбинациями операторов $T_g = e(\alpha, g)$, $g \in G$.* Всякое представление, обладающее таким свойством, принято называть *вполне неприводимым* [88]. Следовательно, $e(\alpha)$ вполне неприводимо тогда и только тогда, когда сигнатура α невырождена.

Пусть W — группа Вейля алгебры X. Определим действие группы Вейля на сигнатуру $\alpha = (p, q)$ по правилу $\alpha_s = (sp, sq)$, $s \in W$. Оказывается, что если сигнатура α невырождена *), то представления $e(\alpha)$, $e(\alpha_s)$ эквивалентны. В общем случае между $e(\alpha)$, $e(\alpha_s)$ существуют некоторые соотношения «частичной эквивалентности».

Рассмотрим для примера группу Лоренца, т. е. группу $G = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$. В этом случае сигнатура имеет вид $\alpha = (p, q)$, где p и q — комплексные числа с целой разностью $\nu = p - q$. Представление $e(\alpha)$ в реализации на группе Z имеет вид

$$T_g f(z) = (\beta z + \delta)^{p-1} \overline{(\beta z + \delta)}^{q-1} f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right).$$

Здесь z — комплексное число. Класс функций $f(z)$ описан в книге [16]. Представление $e(\alpha)$ неприводимо тогда и только тогда, когда числа p, q не являются одновременно целыми ненулевыми одинакового знака. Представления $e(\alpha)$, $e(-\alpha)$ в этом случае эквивалентны.

Назовем для краткости вырожденную сигнатуру α *целой точкой*. Точку α будем называть *положительной* (*отрицательной*), если

---

*) В этом случае сигнатура α_s также невырождена.

$p > 0$, $q > 0$ ($p < 0$, $q < 0$). Если точка α является целой положительной, то $e(\alpha)$ содержит в инвариантном подпространстве конечномерное неприводимое представление $d(\alpha)$. При этом оказывается, что оператор $D = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^p$ осуществляет «частичную эквивалентность» между $e(\alpha)$ и $e(\beta)$, $\beta = (-p, q)$:

$$De(\alpha, g) = e(\beta, g)D.$$

При этом оператор D аннулирует конечномерное подпространство представления $d(\alpha)$ и осуществляет эквивалентность фактор-представления $e(\alpha)/d(\alpha)$ с представлением $e(\beta)$. Точно так же оператор $\overline{D} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^q$ осуществляет «частичную эквивалентность» между $e(\beta)$ и $e(-\alpha)$, причем оказывается, что $e(\beta)$ действует в инвариантном подпространстве $e(-\alpha)$, а $e(-\alpha)/e(\beta)$ эквивалентно $d(\alpha)$.

Соотношения эквивалентности такого типа были впервые обнаружены автором [86]. См. также [16], [82].

§ 5. Аналог формулы Планшереля

Естественно предположить по аналогии с теорией Петера — Вейля, что элементарные представления $e(\alpha)$ должны играть роль «элементарных гармоник» в гармоническом анализе функций на G. Принципиальный результат в этом направлении был получен И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [68], которые построили для классической группы G аналог L^2-теории преобразований Фурье*). Обобщение этих результатов на произвольную полупростую комплексную связную группу Ли было сделано в работе Хариш-Чандры [140].

Заметим прежде всего ([88]), что операторы $T_g = e(\alpha, g)$ ограничены относительно нормы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = L^2(\mathfrak{U})$. Следовательно, представление $e(\alpha)$ можно продолжить также до представления в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_\nu$, где $\mathscr{H}_\nu$ — пополнение $\mathfrak{D}_\nu$ в метрике $\mathscr{H}$. Далее, для каждой сигнатуры $\alpha = (p, q)$ положим $\alpha^* = (-\bar{q}, -\bar{p})$. Оказывается ([88]), что для каждой пары функций $\varphi, \psi \in \mathscr{H}_\nu$ выполняется тождество

$$(e(\alpha, g)\varphi, e(\alpha^*, g)\psi) = (\varphi, \psi),$$

где (φ, ψ) — скалярное произведение в $\mathscr{H}_\nu$ (заметим, что сигнатура α^* имеет тот же индекс, что и α). В частности, если $\rho = p + q$ — чисто мнимое число, то $\alpha^* = \alpha$. В этом случае операторы $e(\alpha, g)$ унитарны. Пусть A_0 — множество всех таких сигнатур. Соответствующее семейство унитарных представлений $e(\alpha)$ называется *основной серией*. Именно с рассмотрения основной серии началось развитие теории бесконечномерных представлений группы G.

Перейдем теперь к рассмотрению функций на группе G. Если функция $x(g)$ локально интегрируема относительно меры Хаара dg

*) Более простой вариант изложения был предложен в работе И. М. Гельфанда и М. И. Граева [66′].