$p > 0$, $q > 0$ ($p < 0$, $q < 0$). Если точка α является целой положительной, то $e(\alpha)$ содержит в инвариантном подпространстве конечномерное неприводимое представление $d(\alpha)$. При этом оказывается, что оператор $D = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^p$ осуществляет «частичную эквивалентность» между $e(\alpha)$ и $e(\beta)$, $\beta = (-p, q)$:

$$De(\alpha, g) = e(\beta, g)D.$$

При этом оператор D аннулирует конечномерное подпространство представления $d(\alpha)$ и осуществляет эквивалентность фактор-представления $e(\alpha)/d(\alpha)$ с представлением $e(\beta)$. Точно так же оператор $\overline{D} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^q$ осуществляет «частичную эквивалентность» между $e(\beta)$ и $e(-\alpha)$, причем оказывается, что $e(\beta)$ действует в инвариантном подпространстве $e(-\alpha)$, а $e(-\alpha)/e(\beta)$ эквивалентно $d(\alpha)$.

Соотношения эквивалентности такого типа были впервые обнаружены автором [86]. См. также [16], [82].

§ 5. Аналог формулы Планшереля

Естественно предположить по аналогии с теорией Петера — Вейля, что элементарные представления $e(\alpha)$ должны играть роль «элементарных гармоник» в гармоническом анализе функций на G. Принципиальный результат в этом направлении был получен И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [68], которые построили для классической группы G аналог L^2-теории преобразований Фурье*). Обобщение этих результатов на произвольную полупростую комплексную связную группу Ли было сделано в работе Хариш-Чандры [140].

Заметим прежде всего ([88]), что операторы $T_g = e(\alpha, g)$ ограничены относительно нормы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = L^2(\mathfrak{U})$. Следовательно, представление $e(\alpha)$ можно продолжить также до представления в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_\nu$, где $\mathscr{H}_\nu$ — пополнение $\mathfrak{D}_\nu$ в метрике $\mathscr{H}$. Далее, для каждой сигнатуры $\alpha = (p, q)$ положим $\alpha^* = (-\bar{q}, -\bar{p})$. Оказывается ([88]), что для каждой пары функций $\varphi, \psi \in \mathscr{H}_\nu$ выполняется тождество

$$(e(\alpha, g)\varphi, e(\alpha^*, g)\psi) = (\varphi, \psi),$$

где (φ, ψ) — скалярное произведение в $\mathscr{H}_\nu$ (заметим, что сигнатура α^* имеет тот же индекс, что и α). В частности, если $\rho = p + q$ — чисто мнимое число, то $\alpha^* = \alpha$. В этом случае операторы $e(\alpha, g)$ унитарны. Пусть A_0 — множество всех таких сигнатур. Соответствующее семейство унитарных представлений $e(\alpha)$ называется *основной серией*. Именно с рассмотрения основной серии началось развитие теории бесконечномерных представлений группы G.

Перейдем теперь к рассмотрению функций на группе G. Если функция $x(g)$ локально интегрируема относительно меры Хаара dg

*) Более простой вариант изложения был предложен в работе И. М. Гельфанда и М. И. Граева [66′].

и достаточно быстро убывает на бесконечности (например, финитна), то имеет смысл операторный интеграл

$$X(\alpha) = \int x(g)\, e(\alpha, g)\, dg. \tag{1}$$

Здесь $X(\alpha)$, как и $e(\alpha, g)$, — линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_\nu$. Операторную функцию $X(\alpha)$ мы будем называть *преобразованием Фурье функции* $x(g)$. Если функция $x(g)$ финитна и бесконечно дифференцируема, то рассуждения, аналогичные проведенным в § 2, показывают, что матричные элементы оператора $X(\alpha)$ являются быстро убывающими в базисе Петера — Вейля. Это убывание является настолько быстрым, что имеет смысл выражение для следа $\operatorname{sp} X(\alpha)$, где след выражается в виде абсолютно сходящегося ряда из диагональных матричных элементов. Оказывается, что (1) допускает формулу обращения, которая имеет вид

$$x(g) = \int\limits_{A_0} \operatorname{sp}\{X(\alpha)\, e(\alpha, g)^*\}\, d\mu(\alpha), \tag{2}$$

где звездочка означает эрмитово сопряжение и $d\mu(\alpha)$ — некоторая мера на множестве сигнатур A_0, называемая *мерой Планшереля*. Таким образом, формула обращения содержит только представления $e(\alpha)$ основной серии. Для описания меры $d\mu(\alpha)$ положим $\alpha = (p, q)$. Интеграл по мере $d\mu(\alpha)$ означает суммирование по индексу ν и интегрирование по чисто мнимым значениям ρ с плотностью

$$m(\rho) = c_0 \prod_{\omega > 0} \frac{(p, \omega)(q, \omega)}{(d, \omega)^2},$$

где ω — произвольный положительный корень и d — полусумма всех таких корней (константа c_0 не зависит от сигнатуры α).

Положим, в частности, в формуле (2) $g = e$ и заменим в полученном интеграле функцию $x(g)$ сверткой вида $\int x(a)\, \overline{y(ag)}\, da$. Нетрудно проверить, что $X(\alpha)$ заменяется при этом на $X(\alpha) Y(\alpha)^*$, где $Y(\alpha)$ — преобразование Фурье функции $y(g)$. В результате имеем

$$\int x(g)\, \overline{y(g)}\, dg = \int\limits_{A_0} \operatorname{sp}\{X(\alpha)\, Y(\alpha)^*\}\, d\mu(\alpha).$$

В частности, при $x(g) = y(g)$ получаем выражение для квадрата нормы функции $x(g)$ в пространстве $L^2(G)$ через интеграл по A_0 от следа $\operatorname{sp} X(\alpha) X(\alpha)^*$ с мерой $d\mu(\alpha)$. Полученная формула имеет смысл уже для произвольных функций из $L^2(G)$. Эта формула является аналогом классической формулы Планшереля из гармонического анализа на прямой.

Заметим теперь, что согласно результатам § 4 элементарные представления основной серии неприводимы *). Формула (2) может быть интерпретирована как разложение регулярного представления в $L^2(G)$ на неприводимые унитарные представления.

§ 6. Теоремы типа Пэли — Винера

Пусть N — пространство всех бесконечно дифференцируемых финитных функций $x(g)$ на группе G. Особый интерес представляет описание образа $\mathfrak{R}$ пространства N при преобразовании Фурье $x(g) \to X(\alpha)$. Заметим, что N является алгеброй относительно свертки на группе G. Преобразование Фурье переводит свертку функций на G в умножение их образов $X(\alpha)$. Таким образом, множество $\mathfrak{R}$ является алгеброй относительно произведения операторных функций $X(\alpha)$.

Для каждого линейного оператора A в пространстве $\mathscr{H}_\nu$ положим $\|A\| = \{\operatorname{sp} AA^*\}^{1/2}$. Оператор A называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если $\|A\| < \infty$. В частности, все операторы $X(\alpha) \in \mathfrak{R}$ являются операторами Гильберта — Шмидта. При этом $X(\alpha)$ является слабо аналитической операторной функцией с оценками вида

$$1^\circ \quad \|\rho^n \Delta^k X(\alpha)\, \Delta^l\| \leqslant C(n, k, l)\, e^{a\,|\operatorname{Re}\rho|}, \quad n, k, l = 0, 1, 2, \ldots,$$

где ρ — показатель сигнатуры α и Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на группе $\mathfrak{U}$. Кроме того, $X(\alpha)$, как и $e(\alpha, g)$, удовлетворяет соотношениям «частичной эквивалентности», о которых упоминалось в § 4. Если r — ранг группы G, то существует $2r$ операторов W_i, S_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, зависящих от сигнатуры α, для которых выполняются следующие «соотношения симметрии»:

$$2^\circ \quad W_i X(\alpha) = X(\alpha_i)\, W_i, \quad S_i X(\alpha) = X(\alpha_i')\, S_i; \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

При этом операторы W_i являются интегральными, а S_i — дифференциальными операторами в $\mathfrak{D}_\nu$. Все остальные соотношения эквивалентности и «частичной эквивалентности» между операторами $X(\alpha)$ являются следствиями соотношений 2°.

Оказывается, что все перечисленные выше свойства описывают общий вид операторной функции $X(\alpha) \in \mathfrak{R}$. Этот результат принадлежит автору [89]. Полученные свойства позволяют описывать финитность и бесконечную дифференцируемость функции $x(g)$ в терминах ее преобразования Фурье.

Аналогичное описание удается получить ([89]) для квадратично интегрируемых финитных функций $x(g)$, для «быстро убывающих функций» $x(g)$ **) и даже для всех обобщенных функций $x(g)$

---

*) Для случая классической группы G этот результат был получен еще И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [68].

**) Для «быстро убывающих» функций близкий результат был также анонсирован И. М. Гельфандом и М. И. Граевым [67].