с компактными носителями на G. Особый интерес представляет семейство обобщенных функций, сосредоточенных в единичной точке группы G. Это семейство изоморфно универсальной обертывающей алгебре $\mathfrak{X}$, построенной по алгебре Ли группы G.

Все перечисленные здесь результаты являются аналогами классических теорем типа Пэли — Винера на прямой (см., например, [15']). Эти результаты имеют принципиальное значение в теории бесконечномерных представлений группы G.

§ 7. Минимальные представления

Элементарные представления группы G с невырожденными сигнатурами α являются важнейшим примером неприводимых бесконечномерных (не обязательно унитарных) представлений группы G. Другие примеры таких представлений мы можем получить, исследуя структуру инвариантных подпространств для представлений $e(\alpha)$ в вырожденных точках.

Фиксируем какой-либо ненулевой вектор $e_0 \in V^{\lambda_0}$, где λ_0 — минимальный из старших весов компактной формы Вейля в линеале $\mathscr{L}_\nu$ (§ 2). Назовем вектор e_0 минимальным вектором класса ν. Пусть $\mathscr{L}(\alpha)$ — циклическая оболочка вектора e_0 относительно $e(\alpha, x)$, $x \in \mathfrak{X}$ (здесь α — произвольная сигнатура с индексом ν). Если сигнатура α невырождена, то $\mathscr{L}(\alpha) = \mathscr{L}_\nu$. В общем случае представляет интерес исследование циклической оболочки $\mathscr{L}(\alpha)$.

Заметим вначале, что если $\beta = \alpha_s$, $s \in W$, то циклические оболочки $\mathscr{L}(\alpha)$, $\mathscr{L}(\beta)$ связаны соотношением вида $\mathscr{L}(\beta) = A(\beta, \alpha)\,\mathscr{L}(\alpha)$, где $A(\beta, \alpha)$ — некоторый «оператор симметрии», порожденный операторами W_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, из § 6 (см. по этому поводу [87]). Оказывается, что на орбите $\{\alpha_s, s \in W\}$ всегда можно найти две точки α_- и α_+ со следующими свойствами: 1) $\mathscr{L}(\alpha_-) = \mathscr{L}_\nu$; 2) $\mathscr{L}(\alpha_+)$ неприводимо. Представление в пространстве $\mathscr{L}(\alpha_+)$ назовем *минимальным представлением алгебры X с сигнатурой α_+*.

Пусть $\mathfrak{D}(\alpha)$ — замыкание $\mathscr{L}(\alpha)$ в топологии пространства $\mathfrak{D}$. Тогда $\mathfrak{D}(\alpha)$ инвариантно относительно $e(\alpha, g)$. Положим $\alpha = \alpha_+$. Сужение $e(\alpha, g)$ на $\mathfrak{D}(\alpha)$ обозначим $\mu(\alpha)$ и назовем *минимальным представлением группы G с сигнатурой α*. Если $\alpha = (\alpha_+)_s$, то положим, по определению, $\mu(\alpha) = \mu(\alpha_+)$.

Заметим, что если векторы $\lambda = p - d$, $\mu = q - d$ являются старшими весами группы G, то минимальное представление $\mu(\alpha)$, $\alpha = (p, q)$, совпадает с конечномерным представлением $d_{\lambda\mu}$, рассмотренным в § 3. В этом случае, как мы видели в § 3, пространство $V_{\lambda\mu}$ представления $d_{\lambda\mu}$ выделяется из $\mathfrak{D}$ некоторой системой уравнений, содержащих инфинитезимальные операторы левого сдвига на группе $\mathfrak{U}$.

В общем случае до сих пор неизвестно достаточно эффективное описание пространств $\mathfrak{D}(\alpha)$ минимальных представлений $\mu(\alpha)$. Известно только, что $\mathfrak{D}(\alpha_+)$ является образом $\mathfrak{D}_\nu$, где ν — индекс α_-,

относительно оператора симметрии $A_0 = A(\alpha_+, \alpha_-)$. Весьма вероятно, что $\mathfrak{D}(\alpha)$, подобно $V_{\lambda\mu}$, также выделяется из $\mathfrak{D}$ с помощью инфинитезимальных операторов левого сдвига. (Эта гипотеза проверена автором в случае $\nu = 0$.)

§ 8. Классификация неприводимых представлений

Вопросы классификации бесконечномерных неприводимых представлений группы G существенно зависят от аксиоматики в классе таких представлений. Действительно, даже если вместо группы G рассматривать аддитивную группу R вещественных чисел, то проблема классификации ее топологически неприводимых представлений равносильна до сих пор нерешенной проблеме классификации линейных непрерывных операторов (с точностью до эквивалентности) в топологическом векторном пространстве. Положение значительно упрощается, если вместо топологически неприводимых представлений группы R рассматривать ее вполне неприводимые представления (см. § 4). В этом случае ввиду выполнения теоремы Бернсайда можно утверждать ([88]), что вполне неприводимое представление группы R одномерно. Следовательно, оно имеет вид экспоненты $e^{\lambda x}$, $x \in R$.

Однако при переходе от группы R к группе G возникает еще одна трудность. Действительно, как мы видели выше, операторы представления $e(\alpha)$ могут быть определены как в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_\nu$, так и в монтелевском пространстве $\mathfrak{D}_\nu$. При этом $\mathfrak{D}_\nu$ всюду плотно в $\mathscr{H}_\nu$, и представление $e(\alpha)$ в обоих пространствах вполне неприводимо. Естественно считать такие представления в некотором роде одинаковыми, т. е. использовать соответствующее определение эквивалентности. Такое определение было предложено М. А. Наймарком [117]. Мы приведем несколько видоизмененный вариант такого определения.

Пусть T_g — представление группы G в топологическом векторном пространстве L, и пусть L_0 — инвариантное векторное подпространство в L. Скажем, что представление T_g в L_0 является уплотнением представления T_g в L, если в L_0 существует более сильная топология, по отношению к которой L_0 полно и операторы T_g непрерывны. Скажем, что два представления группы G слабо эквивалентны, если они имеют эквивалентные уплотнения.

Теперь мы можем сформулировать один из вариантов постановки задачи о классификации неприводимых представлений группы G. Требуется классифицировать все вполне неприводимые представления этой группы с точностью до слабой эквивалентности.

Окончательное решение этой задачи было получено в недавней работе М. А. Наймарка и автора [91] (см. также [90]) *). Оказалось, что *всякое вполне неприводимое представление группы G слабо эквивалентно одному из ее минимальных представлений* $\mu(\alpha)$.

---

*) Близкий (но более слабый) результат был получен в более ранней работе Ф. А. Березина [49].