ДОБАВЛЕНИЕ II

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУПП

В классе общих локально компактных групп существенно усложняются задачи теории представлений и, в частности, задача гармонического анализа на группе. Действительно, мы видели в добавлении I на примере полупростых комплексных групп, что неприводимые представления локально компактной группы не обязательно конечномерны. Вместо обобщенной теории рядов Фурье (теории Петера — Вейля) возникает обобщенная теория интегралов Фурье (вообще говоря, не числовых, а операторных). В настоящее время в теории представлений локально компактных групп существенно разработана только теория унитарных представлений (при построении которой важнейшую роль играет основная спектральная теорема функционального анализа). Краткий обзор этой теории является целью настоящего добавления.

§ 1. Коммутативные группы

Рассмотрим вначале аддитивную группу R всех действительных чисел. Унитарное представление этой группы есть произвольная однопараметрическая группа U_t, $-\infty < t < \infty$, унитарных операторов в гильбертовом пространстве H *). Согласно известной теореме Стоуна (см., например, [22′]) семейство операторов U_t может быть записано в виде

$$U_t = e^{itA}, \qquad -\infty < t < \infty,$$

где A — самосопряженный оператор в пространстве H. Оператор A называется *производящим оператором* однопараметрической группы U_t. Применение к этому оператору классической спектральной теоремы функционального анализа ([39″], [22′], [37′]) позволяет получить дальнейшую информацию о строении представления U_t. Прежде

*) Согласно определению представления операторная функция предполагается непрерывной по t. См., однако, по этому поводу замечание на стр. 636.

всего, операторная функция U_t может быть записана в виде интеграла:

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dP(\lambda), \qquad (*)$$

где $P(\lambda)$ — семейство проекционных операторов, называемое *разложением единицы* и обладающее следующими свойствами: 1) $P(\lambda)P(\mu) = P(\lambda)$ при $\lambda \leqslant \mu$; 2) $P(\lambda)$ перестановочно со всяким непрерывным линейным оператором, перестановочным с A; 3) $P(\lambda)\xi$ непрерывно слева по λ при любом $\xi \in H$; $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} P(\lambda)\xi = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} P(\lambda)\xi = \xi$ для всякого $\xi \in H$.

Формула (*) дает наиболее существенную информацию о представлении U_t. Очевидно, U_t неприводимо только в том случае, когда спектральная мера $dP(\lambda)$ сосредоточена в единственной точке λ_0 и пространство H одномерно. В этом случае $U_t = e^{it\lambda_0}$ *). Формула (*) означает, следовательно, разложение U_t на неприводимые представления.

Из формулы (*) можно получить также другую интерпретацию спектральной теоремы для U_t. Предположим вначале, что в пространстве H существует вектор ξ_0, циклический относительно производящего оператора A (т. е. такой, что H есть замыкание линейной оболочки векторов $A^n\xi_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$). Положим $\sigma(\lambda) = (P(\lambda)\xi_0, \xi_0)$. Тогда пространство H изоморфно гильбертову пространству числовых вектор-функций $f(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, с квадратом нормы $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) < \infty$ Операторная функция U_t задается при такой реализации формулой

$$U_t f(\lambda) = e^{it\lambda} f(\lambda), \qquad (**)$$

в то время как оператор A сводится к умножению на λ: $Af(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ **). Действие проектора $P(\mu)$ сводится в этом случае к умножению на характеристическую функцию полуоси $-\infty < \lambda < \mu$. В общем случае представление U_t разлагается на циклические (т. е. такие, для которых циклический вектор ξ_0 существует). Формула (**) по-прежнему сохраняет силу, с той разницей, что $f(\lambda)$ теперь

---

*) Следовательно, всякое унитарное неприводимое представление группы R одномерно (что может быть доказано и независимо). Для неунитарных топологических неприводимых представлений группы R вопрос остается открытым (см. по этому поводу, например, [74]). Однако тот же результат остается справедливым для вполне неприводимых представлений группы R.

**) Заметим, что оператор A, вообще говоря, неограничен. Его область определения всюду плотна в H.

является (вообще говоря, бесконечномерной) вектор-функцией от λ *).

Заметим, что в реализации (**) каждая δ-функция $\delta(\lambda-\lambda_0)$ является, формально говоря, собственным вектором семейства U_t с собственным значением $e^{it\lambda_0}$. Хотя δ-функция и не является элементом H, такому утверждению можно придать строгий смысл, если воспользоваться аппаратом обобщенных собственных векторов по Гельфанду [17] и Костюченко.

Наконец, перейдем к случаю произвольной коммутативной локально компактной группы G. В этом случае имеет место *теорема Наймарка* [37′] **), обобщающая формулу (*). Пусть U_g — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H, X — группа всех унитарных характеров группы G, т. е. одномерных унитарных представлений $\chi: g \to \chi(g)$. Тогда согласно теореме Наймарка

$$U_g = \int \chi(g)\, dP(\chi),$$

где интеграл берется по группе X и $dP(\chi)$ — спектральная мера, определенная на борелевских множествах в X. Подробности см. в [37′], стр. 487. Отсюда нетрудно получить также и обобщение формулы (**). Пространство H изоморфно реализуется в виде гильбертова пространства вектор-функций $f(\chi)$, $\chi \in X$, квадратично интегрируемых относительно некоторой меры. Представление U_g задается явной формулой

$$U_g f(\chi) = \chi(g) f(\chi).$$

Как и прежде, в частном случае группы R, эти результаты означают разложение U_g на неприводимые представления. В частности, всякое неприводимое унитарное представление группы G одномерно и задается одним из характеров $\chi(g)$.

Гармонический анализ на коммутативной локально компактной группе G является наиболее развитым в настоящее время обобщением обычного анализа Фурье. (Из гармонического анализа на G вытекает, в частности, теория двойственности Понтрягина, о которой мы упоминали в § 107.) На более подробном обзоре этой теории мы сейчас не имеем возможности останавливаться. Отдельные вопросы рассмотрены в монографиях [18′], [35], [37′].

§ 2. Теорема Стоуна — фон Неймана

До сих пор мы имели дело только с коммутирующими семействами унитарных или эрмитовых операторов в гильбертовом

*) Векторная размерность функции $f(\lambda)$, вообще говоря, зависит от λ. См. по этому поводу общее определение прямого интеграла гильбертовых пространств (стр. 636). См. также [37′].

**) Эта теорема независимо и несколько позднее доказывалась также другими авторами (Стоун, Эмброз, фон Нейман).