

является (вообще говоря, бесконечномерной) вектор-функцией от λ^* .

Заметим, что в реализации (**) каждая δ -функция $\delta(\lambda - \lambda_0)$ является, формально говоря, собственным вектором семейства U_t с собственным значением $e^{it\lambda_0}$. Хотя δ -функция и не является элементом H , такому утверждению можно придать строгий смысл, если воспользоваться аппаратом обобщенных собственных векторов по Гельфанду [17] и Костюченко.

Наконец, перейдем к случаю произвольной коммутативной локально компактной группы G . В этом случае имеет место теорема Наймарка [37'] **), обобщающая формулу (*). Пусть U_g — унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H , X — группа всех унитарных характеров группы G , т. е. одномерных унитарных представлений $\chi : g \rightarrow \chi(g)$. Тогда согласно теореме Наймарка

$$U_g = \int \chi(g) dP(\chi),$$

где интеграл берется по группе X и $dP(\chi)$ — спектральная мера, определенная на борелевских множествах в X . Подробности см. в [37'], стр. 487. Отсюда нетрудно получить также и обобщение формулы (**). Пространство H изоморфно реализуется в виде гильбертова пространства вектор-функций $f(\chi)$, $\chi \in X$, квадратично интегрируемых относительно некоторой меры. Представление U_g задается явной формулой

$$\bullet \quad U_g f(\chi) = \chi(g) f(\chi).$$

Как и прежде, в частном случае группы R , эти результаты означают разложение U_g на неприводимые представления. В частности, всякое неприводимое унитарное представление группы G одномерно и задается одним из характеров $\chi(g)$.

Гармонический анализ на коммутативной локально компактной группе G является наиболее развитым в настоящее время обобщением обычного анализа Фурье. (Из гармонического анализа на G вытекает, в частности, теория двойственности Понтрягина, о которой мы упоминали в § 107.) На более подробном обзоре этой теории мы сейчас не имеем возможности остановливаться. Отдельные вопросы рассмотрены в монографиях [18'], [35], [37'].

§ 2. Теорема Стоуна — фон Неймана

До сих пор мы имели дело только с коммутирующими семействами унитарных или эрмитовых операторов в гильбертовом

*) Векторная размерность функции $f(\lambda)$, вообще говоря, зависит от λ . См. по этому поводу общее определение прямого интеграла гильбертовых пространств (стр. 636). См. также [37'].

**) Эта теорема независимо и несколько позднее доказывалась также другими авторами (Стоун, Эмброз, фон Нейман).

пространстве H . Одним из простейших примеров некоммутирующей системы является система эрмитовых операторов P, Q , для которых

$$[P, Q] = iI,$$

где $i = \sqrt{-1}$ и I — единичный оператор в пространстве H (операторы координаты и импульса в квантовой механике). Рассмотрение этого примера играет существенную роль также в развитии общей теории. Заметим вначале, что $[P^n, Q] = in P^{n-1}$ для всех натуральных n , откуда следует общая формула

$$[f(P), Q] = if'(P) \quad (*)$$

для произвольных полиномов $f(z)$ с заменой z на P , где штрих в правой части означает дифференцирование по z . Естественно предположить, что $(*)$ сохраняет силу также для более широкого класса функций $f(z)$. В частности, рассмотрим резольвенту $R_\lambda = (P - \lambda I)^{-1}$ в тех точках, где она определена. Имеем

$$[R_\lambda, Q] = R_\lambda [Q, P - \lambda I] R_\lambda = -iR_\lambda^2,$$

что совпадает с формулой $(*)$ при $f(z) = (z - \lambda)^{-1}$. Но тогда формула $(*)$ сохраняет силу также для всевозможных полиномов от P , R_λ и также для сильных пределов таких полиномов (при условии, что $f'(P)$ имеет смысл). К последнему классу функций относится, в частности ([22']), однопараметрическая группа операторов $U_t = e^{itP}$ *). Следовательно, $[U_t, Q] = -tU_t$, откуда имеем **).

$$U_t^{-1}QU_t = Q + tI. \quad (**)$$

Из формулы $(**)$ следует, что спектр оператора Q заполняет всю действительную ось. Воспользуемся для Q спектральной теоремой, т. е. реализуем этот оператор как оператор умножения на x в классе вектор-функций $f(x)$, интегрируемых с квадратом по мере $d\sigma(x)$:

$$Qf(x) = xf(x).$$

Из формулы $(**)$ следует, что вектор-функция $f(x)$ имеет одинаковую размерность во всех точках x и мера $d\sigma(x)$ совпадает с обычной лебеговой мерой. Следовательно, можно считать, что $f(x)$ принимает значения в некотором фиксированном гильбертовом пространстве H_0 . Пространство H состоит при этом из всех таких функций

*) Существование унитарной группы U_t следует из спектральной теоремы для оператора P . Если бы оператор P был ограниченным, то мы могли бы непосредственно выразить U_t в виде степенного ряда по степеням оператора P .

**) Эта формула может быть получена значительно проще, если заметить, что функция U_t дифференцируема по t , причем $U'_t = iP U_t$. Полагая $F(t) = U_t^{-1}QU_t$, имеем отсюда $F(t)' = -i[P, Q] = I$. Следовательно, $F(t)'' = 0$, и в результате $F(t) = F(0) + tI = Q + tI$.

ций $f(x)$, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_0^2 d\sigma(x) < \infty$, где $\|f\|_0$ означает норму в пространстве H_0 . Рассмотрим в H оператор дифференцирования

$$\tilde{P} = i \frac{d}{dx}$$

(определенный на всюду плотном множестве в H). Тогда, как легко проверить, $[\tilde{P}, Q] = iI$, т. е. операторы \tilde{P} , Q удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и пара P , Q . Следовательно, оператор $P - \tilde{P}$ перестановочен с Q . Но тогда, как известно из спектральной теории, $P - \tilde{P}$ есть оператор умножения на некоторую функцию от переменной x ; следовательно,

$$P = \tilde{P} + \varphi(x) = i \frac{d}{dx} + \varphi(x).$$

В силу эрмитовости P и \tilde{P} функция $\varphi(x)$ действительна. В результате мы находим явное выражение для оператора P : $P = i \frac{d}{dx} + \varphi(x)$. Рассмотрим унитарный оператор $S = e^{-i \int \varphi(x) dx}$. Имеем $SQS^{-1} = Q$, $SPS^{-1} = i \frac{d}{dx}$. Следовательно, после унитарного преобразования S в пространстве H мы получаем из пары P , Q пару операторов

$$P_0 = i \frac{d}{dx}, \quad Q_0 = x.$$

Следовательно, с точностью до унитарной эквивалентности всякие два эрмитовых оператора P , Q , удовлетворяющие соотношению коммутации $[P, Q] = iI$, сводятся к паре P_0 , Q_0 . Это и составляет содержание известной теоремы Стоуна — фон Неймана. Разумеется, мы привели доказательство этой теоремы с некоторыми сокращениями*).

Замечание. Нетрудно видеть, что уравнение $[P, Q] = iI$ не имеет никаких (эрмитовых или неэрмитовых) решений в классе конечномерных линейных операторов. Действительно, след левой части этого соотношения равен нулю, в то время как след правой части отличен от нуля.

Рассмотрим теперь группу $Z(3)$ всех треугольных матриц 3×3 с единицами на главной диагонали. Легко видеть, что алгебра Ли этой группы натянута на три базисных элемента p , q , r с единственным нетривиальным соотношением коммутации $[p, q] = r$. Элемент r является центральным. Пусть теперь P , Q , R — образы элементов p , q , r в некотором унитарном представлении $Z(3)$. В силу унитарности этого представления можно считать (за счет умножения на

*) См. также [130'], [118], [102].

$i = \sqrt{-1}$), что операторы P , Q эрмитовы. Если представление не-приводимо, то оператор R оказывается кратным единичному, и мы получаем соотношение коммутации

$$[P, Q] = i\lambda I,$$

где I — единичный оператор в H . Если $\lambda = 0$, то $[P, Q] = 0$, и представление коммутативно. (При этом в силу неприводимости оно одномерно.) Если же $\lambda \neq 0$, то мы имеем, как и выше, $P = i \frac{d}{dx}$, $Q = \lambda x$ с точностью до унитарной эквивалентности. Для соответствующих однопараметрических подгрупп $U_t = e^{itP}$, $V_t = e^{itQ}$ получаем следующие формулы:

$$U_t f(x) = f(x - t), \quad V_t f(x) = e^{it\lambda x} f(x). \quad (***)$$

Таким образом, теорема Стоуна — фон Неймана позволяет получить описание всех, с точностью до унитарной эквивалентности, неприводимых унитарных представлений группы $Z(3)$. (Действительно, однопараметрические подгруппы U_t , V_t порождают эти представления.) Мы видим, что всякое такое представление либо одномерно, либо бесконечномерно.

В первом случае представление задается двумя действительными скалярами α и β , к умножению на которые сводятся операторы P и Q ($R = 0$). В этом случае $U_t = e^{ita}$, $V_t = e^{it\beta}$. Во втором случае представление задается явными формулами (***)¹, причем результат классификации зависит от действительного числа $\lambda \neq 0$. Нетрудно проверить, что представления с различными λ при этом попарно неэквивалентны.

Геометрически множество всех неприводимых унитарных представлений группы $Z(3)$ можно отождествить с множеством всех плоскостей $\lambda = \text{const} \neq 0$ и множеством всех точек на плоскости $\lambda = 0$ в трехмерном евклидовом пространстве с координатами λ , α , β .

§ 3. Индуцированные представления

Прежде чем приступить к дальнейшему изложению теории, остановимся на рассмотрении специального типа представлений, называемых индуцированными. Пусть X — однородное пространство с группой движений G , причем действие элемента $g \in G$ на точку $x \in X$ обозначается символом xg . Рассмотрим линейный оператор T_g , действующий в пространстве функций на X по формуле

$$T_g f(x) = \alpha(x, g) f(xg).$$

Для того чтобы семейство операторов T_g являлось представлением группы G , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\alpha(x, g_1 g_2) = \alpha(x, g_1) \alpha(xg_1, g_2), \quad \alpha(x, e) = 1. \quad (*)$$

Найдем общее решение этого функционального уравнения. Фиксируем некоторую точку $x_0 \in X$ и положим для краткости $\alpha(g) = \alpha(x_0, g)$.