$i=\sqrt{-1}$), что операторы P, Q эрмитовы. Если представление неприводимо, то оператор R оказывается кратным единичному, и мы получаем соотношение коммутации

$$[P, Q] = i\lambda I,$$

где I — единичный оператор в H. Если $\lambda = 0$, то $[P, Q] = 0$, и представление коммутативно. (При этом в силу неприводимости оно одномерно.) Если же $\lambda \neq 0$, то мы имеем, как и выше, $P = i\dfrac{d}{dx}$, $Q = \lambda x$ с точностью до унитарной эквивалентности. Для соответствующих однопараметрических подгрупп $U_t = e^{itP}$, $V_t = e^{itQ}$ получаем следующие формулы:

$$U_t f(x) = f(x-t), \quad V_t f(x) = e^{it\lambda x} f(x). \qquad (***)$$

Таким образом, теорема Стоуна — фон Неймана позволяет получить описание всех, с точностью до унитарной эквивалентности, неприводимых унитарных представлений группы $Z(3)$. (Действительно, однопараметрические подгруппы U_t, V_t порождают эти представления.) Мы видим, что всякое такое представление либо одномерно, либо бесконечномерно.

В первом случае представление задается двумя действительными скалярами α и β, к умножению на которые сводятся операторы P и Q ($R = 0$). В этом случае $U_t = e^{it\alpha}$, $V_t = e^{it\beta}$. Во втором случае представление задается явными формулами (***), причем результат классификации зависит от действительного числа $\lambda \neq 0$. Нетрудно проверить, что представления с различными λ при этом попарно неэквивалентны.

Геометрически множество всех неприводимых унитарных представлений группы $Z(3)$ можно отождествить с множеством всех плоскостей $\lambda = \text{const} \neq 0$ и множеством всех точек на плоскости $\lambda = 0$ в трехмерном евклидовом пространстве с координатами λ, α, β.

§ 3. Индуцированные представления

Прежде чем приступить к дальнейшему изложению теории, остановимся на рассмотрении специального типа представлений, называемых индуцированными. Пусть X — однородное пространство с группой движений G, причем действие элемента $g \in G$ на точку $x \in X$ обозначается символом xg. Рассмотрим линейный оператор T_g, действующий в пространстве функций на X по формуле

$$T_g f(x) = \alpha(x, g) f(xg).$$

Для того чтобы семейство операторов T_g являлось представлением группы G, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\alpha(x, g_1 g_2) = \alpha(x, g_1)\, \alpha(xg_1, g_2), \qquad \alpha(x, e) = 1. \qquad (*)$$

Найдем общее решение этого функционального уравнения. Фиксируем некоторую точку $x_0 \in X$ и положим для краткости $\alpha(g) = \alpha(x_0, g)$.

Тогда согласно (*) функция $\alpha(g)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\alpha(g_0 g) = \alpha(g_0)\,\alpha(g), \quad \alpha(e) = 1, \tag{**}$$

для произвольных элементов $g_0 \in G_0$, $g \in G$, где G_0 — стационарная подгруппа точки x_0. Далее, выберем для каждой точки $x \in X$ элемент $g_x \in G$, переводящий x_0 в x. Тогда всякий элемент $g \in G$ однозначно запишется в виде $g_0 g_x$, $g_0 \in G$, и мы имеем в силу (*)

$$\alpha(x_0, g_x g) = \alpha(x_0, g_x)\,\alpha(x, g).$$

Отсюда видно, что функция $\alpha(x, g)$ может быть выражена через функцию $\alpha(g)$:

$$\alpha(x, g) = \alpha(g_x)^{-1}\,\alpha(g_x g).$$

Представим элемент $g_x g$ в виде $g_0 g_y$, где $g_0 \in G_0$, $y \in X$. Тогда из последнего соотношения имеем также *)

$$\alpha(x, g) = \alpha(g_x)^{-1}\,\alpha(g_0)\,\alpha(g_y).$$

Полученная формула дает общий вид решения $\alpha(x, g)$. Используя преобразование эквивалентности $Af(x) = \alpha(g_x) f(x)$, мы можем заменить представление T_g эквивалентным представлением $\widetilde{T}_g = AT_gA^{-1}$. При этом

$$\widetilde{T}_g f(x) = \tilde{\alpha}(x, g)\, f(xg),$$

и функция $\tilde{\alpha}(x, g)$ удовлетворяет условию $\tilde{\alpha}(g_x) = 1$. Следовательно, в этом случае мы имеем $\tilde{\alpha}(x, g) = \tilde{\alpha}(g_0)$, где g_0, как и прежде, определяется разложением $g_x g = g_0 g_y$.

Функция $\alpha(g_0)$ является, согласно (**), представлением группы G_0. Принято говорить, что представление T_g группы G *индуцируется* представлением $\alpha(g_0)$ подгруппы G_0 **). Все изложенные выше построения сохраняют силу также в том случае, когда $f(x)$ — вектор-функции со значениями в некотором векторном пространстве L и $\alpha(x, g)$ — линейные операторы в L. Представление T_g при этом по-прежнему называется *индуцированным*. Если $\dim L = 1$, то такое представление иногда называют *мономиальным*.

Условие неприводимости $\alpha(g_0)$ необходимо, но недостаточно для неприводимости T_g. Действительно, в добавлении I мы имели дело с элементарными представлениями полупростой комплексной группы G. Все они мономиальны, т. е. представление $\alpha(g_0)$ одномерно и потому неприводимо. Однако мы видели, что элементарное представление может быть приводимым. Заметим, кстати, что роль группы G_0 играет в этом случае максимальная разрешимая подгруппа в G.

---

*) Здесь мы используем функциональное уравнение (**).

**) Напомним, что G_0 — стационарная подгруппа произвольно фиксированной точки $x_0 \in X$. Если заменить x_0 на $x_0 g$, то подгруппа G_0 заменяется сопряженной подгруппой $g^{-1} G_0 g$.

Как мы знаем из основного текста (§ 17), однородное пространство X можно отождествить с фактор-пространством G/G_0, где G_0 — стационарная подгруппа фиксированной точки $x_0 \in X$. Можно также отождествить пространство X с множеством точек-представителей g_x, $x \in X$. Используя разложение $g = g_0 g_x$, будем вместо функций $f(x)$ рассматривать функции $f(g) = f(g_0 g_x) = \alpha(g_0) f(x)$. Все эти функции, очевидно, удовлетворяют соотношению

$$f(g_0 g) = \alpha(g_0) f(g)$$

при любых значениях $g_0 \in G_0$, $g \in G$. Пусть F_α — множество всех таких функций на группе G. Преобразование правого сдвига $R_g f(a) = f(ag)$ образует представление в F_α, которое, как легко проверить, эквивалентно исходному представлению T_g. Следовательно, мы получаем еще одну реализацию индуцированных представлений (которой уже неоднократно пользовались в основном тексте).

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на пространство функций, в котором действует индуцированное представление. Однако в приложениях это постоянно приходится делать, причем произвол в определении такого пространства довольно широк (например, дифференцируемые функции или функции класса L^2 в условиях добавления I). Если на X существует мера dx такая, что $d(xg) = \omega(x, g) dx$ с конечным якобианом $\omega(x, g)$ (такая мера называется квазиинвариантной), то условие

$$\alpha(x, g)\,\overline{\alpha(x, g)} = \omega(x, g), \qquad (***)$$

где черта означает комплексное сопряжение, позволяет построить унитарное представление группы G с помощью формулы индуцированного представления. Для этого надо ограничиться классом всех функций $f(x)$, интегрируемых с квадратом по мере dx. (Несложная проверка предоставляется читателю.) Здесь мы предполагаем, что $f(x)$ — числовая функция, однако если L — гильбертово пространство, то условие (***) этого добавления сохраняется, с заменой черты на эрмитово сопряжение. В этом случае

$$\alpha(g_0) = u(g_0)\,\beta(g_0),$$

где $\beta(g_0)$ — нормирующий множитель и представление $u(g_0)$ группы G_0 унитарно. Обычно, имея дело с унитарными представлениями, говорят, что представление T_g индуцируется представлением $u(g_0)$ (а не $\alpha(g_0)$, как принято в нашем тексте). Однако если мера dx инвариантна ($d(xg) = dx$), то $\beta(g_0) = 1$.

Конструкция индуцированных представлений часто используется для построения явных моделей неприводимых представлений той или иной группы G *). Большинство известных математикам неприводимых представлений классических групп Ли являются индуцированными и даже мономиальными.

---

*) Теория индуцированных представлений восходит к Фробениусу, рассматривавшему конечные группы. Современное развитие этой теории начинается с работы И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [68] и систематизируется в работах Г. Макки [107′], [107″], Ф. Брюа [59].