

## § 4. Полупрямые произведения

Рассмотрим практически важный случай, когда группа  $G$  может быть представлена в виде  $G = ST$  (однозначное разложение), где  $S$  — подгруппа и  $T$  — нормальный делитель. Такое произведение двух подгрупп называется *полупрямым*. (Пример: группа движений  $G$  с подгруппой вращений  $S$  и подгруппой трансляций  $T$ .) В этом параграфе мы ограничимся частным случаем, когда подгруппа  $T$  коммутативна. Покажем, что знание неприводимых унитарных представлений подгруппы  $S$  позволяет перечислить также все неприводимые унитарные представления группы  $T$ .

Пусть  $U_g$  — неприводимое унитарное представление группы  $G$  в гильбертовом пространстве  $H$ . Согласно результатам §1 сужение этого представления на подгруппу  $T$  может быть записано в виде прямого интеграла одномерных представлений по множеству  $X$ , где  $X$  — группа всех унитарных характеров группы  $G$ . Иначе говоря, пространство  $H$  мы можем реализовать в виде пространства вектор-функций  $f(x)$ ,  $x \in X$ , причем

$$U_t f(x) = x(t) f(x), \quad (*)$$

где  $x(t)$  — значение характера  $x \in X$  на элементе  $t \in T$ . Напомним, что функции  $f(x)$  интегрируемы в квадрате по некоторой мере  $d\sigma(x)$ . Знание этой меры существенно для описания представления.

Рассмотрим теперь преобразование  $U_s$ ,  $s \in S$ . Поскольку  $T$  является нормальным делителем в  $G$ , то, в частности,  $s^{-1}ts \in T$ . Положим  $t(s) = s^{-1}ts$ . Тогда имеем

$$U_t U_s = U_s U_{t(s)}.$$

С другой стороны, рассмотрим в пространстве  $H$  преобразование  $V_s f(x) = f(x_s)$ , где характер  $x_s$  определяется по формуле  $x_s(t(s)) = x(t)$ . Тогда, как легко проверить, имеет место тождество

$$U_t V_s = V_s U_{t(s)}.$$

Сопоставляя последние две формулы, мы видим, что преобразование  $U_s V_s^{-1}$  перестановочно со всеми операторами  $U_t$ ,  $t \in T$ . Но всякое такое преобразование, как известно ([37']), является оператором умножения на некоторую функцию от  $x$ . В результате  $U_s V_s^{-1} = a(x, s)$ , откуда имеем

$$U_s f(x) = a(x, s) f(x_s). \quad (**)$$

Полученные формулы (\*), (\*\*) вполне определяют представление группы  $G$ . Мы видим, что такое представление может быть записано по формуле индуцированного представления в некотором классе функций  $f(x)$ ,  $x \in X$ . Однако мы не можем, вообще говоря, утверждать, что пространство  $X$  является однородным \*).

До сих пор мы не пользовались условием неприводимости представления  $U_g$ . Очевидно, свойство приводимости существенно зависит

\* ) То есть что преобразование  $x \rightarrow x_s$  транзитивно.

от структуры преобразования  $x \rightarrow x_s$  в пространстве  $X$ , а также от меры  $d\sigma(x)$ . Может случиться, что преобразование  $x \rightarrow x_s$  является эргодическим (§ 17). Этот случай особенно сложен для изучения, и мы его исключим. Иначе говоря, предположим, что пространство  $X$  расслаивается на однородные. При этом можно показать, что в силу неприводимости  $U_g$  мера  $d\sigma(x)$  сосредоточена лишь на одной однородной компоненте  $X \subset X$ .

Условимся теперь рассматривать функции  $f(x)$  только при  $x \in X$ . Тогда согласно (\*), (\*\*) мы получаем формулу индуцированного представления в классе функций  $f(x)$  на однородном пространстве  $X$ . Согласно результатам предыдущего параграфа представление  $U_g$  индуцируется некоторым представлением  $\alpha(g_0)$  подгруппы  $G_0 \subset G$ , причем можно считать, что

$$U_g f(x) = \alpha(g_0) f(xg),$$

где точка  $g_0$  определяется из разложения  $g_0 g = g_0 g_y$ . Подгруппа  $G_0$  есть стационарная подгруппа некоторой фиксированной точки  $x_0 \in X$ . Отсюда следует, что  $G_0$  содержит  $T$  (ввиду коммутативности  $T$ ). Следовательно, мы имеем

$$G_0 = S_0 T,$$

где  $S_0$  — некоторая подгруппа группы  $S$ . Очевидно также, что  $\alpha(g_0) = \alpha(s_0 t) = \alpha(s_0)x_0(t)$ , поскольку  $\alpha(t) = x_0(t)$ . Допуская вольность речи, иногда говорят, что представление  $U_g$  индуцируется представлением  $\alpha(s_0)$  подгруппы  $S_0$ \*). Однако в действительности представление  $U_g$  характеризуется следующими данными: 1) неприводимое представление  $\alpha(s_0)$  подгруппы  $S_0$ ; 2) характер  $x_0(t)$  подгруппы  $T$  такой, что  $x_0(t(s)) = x_0(t)$ ; 3) мера  $d\sigma(x)$  на орбите  $x_0(t(s))$ ,  $s \in S$ \*\*).

Пример. Пусть  $G$  — группа движений  $n$ -мерного евклидова пространства с подгруппой вращений  $S$  и подгруппой трансляций  $T$ . Символически удобно записывать элементы  $g \in G$  в виде матриц порядка  $n+1$  следующего вида:

$$g = \begin{vmatrix} s & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где  $s \in S$  и  $t$  —  $n$ -мерный вектор, отвечающий трансляции  $t \in T$ . При этом мы отождествляем элементы  $s \in S$ ,  $t \in T$  с матрицами

$$s = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad t = \begin{vmatrix} e & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

\*) Физики называют такую подгруппу «малой группой» (small group).

\*\*) При этом можно показать, что мера  $d\sigma(x)$  должна быть квазинвариантна относительно преобразования  $x \rightarrow x_s$ . Если меры  $d\sigma(x)$ ,  $dt(x)$  эквивалентны (т. е.  $d\sigma(x) = \omega(x) dt(x)$  с невырожденным якобианом  $\omega(x)$ ), то соответствующие представления также эквивалентны.

где  $e$  — единичная матрица  $n \times n$ . Вычисляя  $s^{-1}ts$ , находим, что это преобразование сводится к замене вектора  $t$  на  $s^{-1}t$ . Далее, всякий характер  $x(t)$  запишем в виде  $x(t) = \exp i(a, t)$ , где скобка означает скалярное произведение  $n$ -мерных векторов  $a, t$ . Отсюда следует, что преобразование  $x \rightarrow x_s$  сводится к замене вектора  $a$  на  $s^{-1}a$ . Действительно,

$$x_s(t(s)) = \exp i(s^{-1}a, s^{-1}t) = \exp i(a, t) = x(t).$$

Всякая орбита преобразования  $a \rightarrow s^{-1}a$  есть сфера в  $n$ -мерном пространстве некоторого радиуса  $r$ . Рассмотрим такую сферу  $X$ ; тогда на ней существует мера  $dx$ , инвариантная относительно поворотов  $x \rightarrow sx$ . Искомое пространство функций  $f(x)$  составим из функций  $f(x)$ ,  $x \in X$ , квадратично интегрируемых относительно  $dx$ .

Остается определить подгруппу  $G_0$ . Фиксируем произвольную точку  $x_0 \in X$ . Подгруппа поворотов  $S_0$ , сохраняющих эту точку, очевидно, изоморфна  $O(n - 1)$ . В результате  $G_0 = S_0T$ , где  $T$  — подгруппа трансляций. Согласно изложенной выше общей теории не-трудно получить, что всякое неприводимое унитарное представление группы  $G$  задается следующими данными: 1) неприводимым (конечномерным) представлением группы  $O(n - 1)$ ; 2) неотрицательным числом  $r \geqslant 0$  (радиус орбиты). Мера  $dx$  при этом определяется однозначно с точностью до множителя \*).

Результаты, изложенные в этом параграфе, принадлежат Г. Макки [107], [107']. Мы опустили все сложные вопросы, связанные с теорией меры, в том числе рассмотрение эргодических движений.

## § 5. Нильпотентные группы Ли

Пусть теперь  $G$  — нильпотентная связная группа Ли. В этом параграфе мы докажем следующую теорему А. А. Кириллова: *всякое неприводимое унитарное представление группы  $G$  мономиально*.

Доказательство будем вести индукцией по размерности группы  $G$ , т. е. по размерности соответствующей алгебры Ли, которую обозначим  $A$ . Этот метод позволяет считать, не ограничивая общности, что представление алгебры  $A$  является точным. (Действительно, в противном случае мы имеем дело с представлением некоторой фактор-алгебры, имеющей меньшую размерность.) Далее, пусть  $Z$  — центр алгебры  $A$ . Ввиду неприводимости операторы центра являются скалярами \*\*). Ввиду предположения о точности мы можем отсюда заключить, что  $\dim Z = 1$ . (Действительно, всякая нильпотентная алгебра содержит нетривиальный центр (§ 85); следовательно,  $\dim Z \neq 0$ ; в то же время поле скаляров имеет размерность 1.)

\*) Действительно, всякая мера, квазинвариантная относительно компактной группы (в нашем случае  $O(n - 1)$ ), эквивалентна инвариантной. Доказательство предоставляется читателю.

\*\*) Это следует из обобщенной леммы Шура [37'], о которой подробнее будет сказано в § 6.