При этом $\lambda \neq 0$, поскольку представление является точным. Далее, пусть $g_0 \in G_0$. Согласно определению G_0 оператор T_{g_0} перестановочен с T_y. Следовательно, этот оператор при каждом g_0 сводится к умножению на некоторую функцию от переменной t:

$$T_{g_0} f(t) = A(t, g_0) f(t).$$

В то же время $T_{\exp sx} f(t) = f(t + x)$. Отсюда следует, что прямая $X_0 = \{-\infty < t < \infty\}$ является однородным пространством для G. Согласно разложению $G = G_0 T$ формулы для T_{g_0} и $T_{\exp sx}$ вполне определяют представление T_g. Мы видим, что это представление индуцировано представлением

$$U_{g_0} = A(t_0, g_0)$$

подгруппы G_0 (здесь t_0 — произвольно фиксированная точка в X_0).

4. Остается воспользоваться следующим «правилом транзитивности» из теории индуцированных представлений ([102]): пусть $G_2 \subset \subset G_1 \subset G$ — цепочка вложенных подгрупп; если представление τ группы G индуцировано представлением τ_1 подгруппы G_1, которое в свою очередь индуцировано представлением τ_2 подгруппы G_2, то представление τ индуцировано также представлением τ_2. Это открывает возможность для индукции. Постепенно понижая размерность, приходим к случаю $\dim A = 3$, рассмотренному выше. Теорема доказана.

В статье А. Кириллова [102] дается дальнейшее уточнение изложенной конструкции. Мономиальное представление задается, очевидно, некоторым линейным функционалом f над алгеброй A (алгеброй Ли группы G). Оказывается, что представления, индуцированные функционалами f_1 и f_2, эквивалентны тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$f_1 = \rho(g) f_2, \qquad g \in G,$$

где $\rho(g)$ — представление группы G, сопряженное присоединенному представлению этой группы в алгебре A. Таким образом, возникает *взаимно однозначное соответствие между орбитами $\rho(g)$ и неприводимыми унитарными представлениями группы G.* Различные операции тензорной алгебры (тензорное произведение, сужение с группы на подгруппу) также получают замечательную интерпретацию в терминах орбит. Заслуживает особого внимания то обстоятельство, что «язык орбит» не зависит от структурной теории (которая для нильпотентных групп фактически не развита). Можно надеяться, что этот язык в известной степени окажется универсальным также в классе произвольных групп Ли (при описании всех неприводимых унитарных представлений).

§ 6. Разложение унитарных представлений на неприводимые

До сих пор мы рассматривали лишь отдельные типы групп и, главным образом, их неприводимые представления. Остановимся теперь на некоторых общих результатах в предположении, что G — произвольная локально компактная группа со счетной базой окрест-

ностей единицы. (Этому условию удовлетворяет, в частности, всякая группа Ли.)

Пусть U_g — унитарное представление группы G в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Заметим, что в классе таких представлений для сильной непрерывности операторной функции U_g достаточна ее слабая непрерывность ([37′], стр. 443). Мы уже отмечали в основном тексте, что для унитарных представлений имеет место принцип полной приводимости. Последовательное применение этого принципа позволяет заключить о разложимости представления U_g на неприводимые. Однако число неприводимых компонент может быть несчетно, и потому для строгого описания полученной ситуации приходится использовать специальное понятие прямого интеграла.

Пусть Λ — компактное пространство с мерой $d\sigma(\lambda)$. Предположим, что почти каждой точке $\lambda \in \Lambda$ поставлено в соответствие гильбертово пространство H_λ размерности $n(\lambda) = 1, 2, \ldots, \infty$. Предположим, что функция $n(\lambda)$ измерима по мере $d\sigma(\lambda)$. Так как функция $n(\lambda)$ принимает лишь счетное число значений, то пространство Λ разбивается в счетную теоретико-множественную сумму непересекающихся подпространств Λ_k, на каждом из которых $n(\lambda) = \text{const}$. Следовательно, при $\lambda \in \Lambda_k$ все пространства H_λ можно отождествить с некоторым фиксированным пространством H_k. Вектор-функцию $f(\lambda) \in H_k$, $\lambda \in \Lambda_k$, мы называем измеримой, если числовые функции $(f(\lambda), \varphi)$ измеримы при каждом $\varphi \in H_k$. Вектор-функцию $f(\lambda) \in H_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, назовем измеримой, если она измерима на всех подпространствах H_k. Определим пространство H как множество всех измеримых функций $f(\lambda) \in H_\lambda$, для которых

$$\|f\|^2 = \int_\Lambda \|f(\lambda)\|^2 \, d\sigma(\lambda) < \infty.$$

Соответствующим образом вводится скалярное произведение двух функций $f(\lambda)$, $g(\lambda) \in H$. Функции $f(\lambda)$, для которых $\|f\| = 0$, отождествляются с нулем. В результате пространство H становится гильбертовым пространством. Это пространство называется *прямым интегралом* пространств H_λ и обозначается символом

$$H = \int_\Lambda H_\lambda \, d\sigma(\lambda).$$

Заметим, что H_λ, вообще говоря, не является подпространством в пространстве H (исключение составляет тот случай, когда мера точки λ конечна). Если почти в каждом пространстве H_λ задан оператор A_λ, то оператор $Af(\lambda) = A_\lambda f(\lambda)$ называется *прямым интегралом операторов* A_λ.

Вернемся к рассмотрению унитарного представления U_g группы G. Основной результат формулируется следующим образом: *представление U_g есть прямой интеграл неприводимых унитарных представлений $U_g(\lambda)$ по некоторой мере $d\sigma(\lambda)$.*

Существенно, что полученное разложение, вообще говоря, не является однозначным. Более того, существуют такие группы, для которых неоднозначным является также спектр, т. е. «список» неприводимых представлений, входящих в разложение ([37']). Положение упрощается, если вместо неприводимых представлений рассматривать представления, «кратные неприводимым», точнее, так называемые «фактор-представления».

Представление U_g есть прямой интеграл взаимно неэквивалентных фактор-представлений ([37']). Такое разложение определяется однозначно. Известны условия, при которых всякий ограниченный оператор в H, перестановочный с U_g, есть прямой интеграл скалярных операторов $\mu(\lambda) I_\lambda$, где I_λ — единичный оператор на H и $\mu(\lambda)$ — число (континуальный аналог леммы Шура ([37'], стр. 413)).

В частности, всякий ограниченный оператор, перестановочный со всеми операторами неприводимого унитарного представления, кратен единичному (однако этот результат, конечно, доказывается независимо и значительно проще).

Если U_g — регулярное (правое или левое) представление группы G, то указанное выше разложение приводит к так называемой «абстрактной формуле Планшереля» (И. Сигал [129]). Однако для каждого конкретного класса групп проблема состоит в описании явного вида меры, входящей в разложение (так называемой меры Планшереля).

К значительно большим сложностям приводит рассмотрение неунитарных представлений. Ввиду отсутствия принципа полной приводимости здесь не существует даже корректной постановки задачи о разложении. Неприводимые представления сравнительно подробно изучены только в случае полупростой комплексной группы Ли.