ДОБАВЛЕНИЕ III

УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ В КЛАССЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Мы уже упоминали во введении, что методы теории линейных представлений групп Ли позволили в последнее время получить значительные успехи в некоторых разделах теоретической физики, главным образом в вопросах классификации элементарных частиц. Целью этого добавления является вкратце проследить основные этапы логического развития идей, приведших к упомянутым результатам.

§ 1. Инвариантность и законы сохранения

Напомним вначале основные постулаты квантовой механики, которые в известной степени сохраняются также и в квантовой теории поля.

1. Волновая функция. Согласно основным положениям нерелятивистской квантовой механики эволюция всякой физической системы во времени определяется уравнением Шредингера $\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\Gamma\psi$, где Γ — оператор энергии (гамильтониан, массовый оператор). Здесь ψ является элементом некоторого гильбертова пространства H, называемого пространством состояний. Вся информация о физической системе содержится в векторе ψ, который называется *вектором состояния* или волновой функцией. Важнейшую роль в теории играют квадратичные формы вида $(A\psi, \psi)$, где A — линейный оператор в H. Обычно рассматриваются только эрмитовы операторы, которые соотносятся той или иной *физической величине* (импульс, координата, момент импульса, энергия, заряд). Выражение $(A\psi, \psi)$ означает при этом среднее значение физической величины A в состоянии ψ.

Обычно используется та или иная функциональная реализация пространства H. Всякая такая реализация связана с выбором некоторой системы коммутирующих эрмитовых операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, которые «диагонализуются» в общем базисе в смысле § 1 добавления II. Иначе говоря, пространство H реализуется в виде пространства вектор-функций $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, квадратично интегрируемых относительно некоторой меры $d\sigma(x)$, причем опера-

торы A_i действуют по формуле $A_i f(x) = x_i f(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В качестве таких операторов иногда выбирают операторы координат, которые характеризуют пространственное положение отдельных частиц системы. В этом случае, если A_ω — оператор умножения на характеристическую функцию некоторой области ω m-мерного пространства векторов x, то форма $(A_\omega f, f)$ определяет вероятность локализации системы в области ω.

Особую роль играют состояния с фиксированной энергией λ. Для таких состояний $\Gamma\psi = \lambda\psi$. Точно так же, если вектор ψ является собственным относительно некоторого эрмитова оператора A: $A\psi = \mu\psi$, то состоянию ψ соответствует определенное значение μ физической величины A.

2. Законы сохранения. Предположим, что оператор A перестановочен с гамильтонианом. Тогда соотношение $A\psi = \mu\psi$ не нарушается при эволюции вектора ψ во времени. Действительно, $\psi = e^{it\Gamma}\psi_0$, где ψ_0 — значение ψ при $t = 0$, в предположении, что Γ не зависит от времени (впрочем, это предположение несущественно). Следовательно, физическая величина A является в этом случае интегралом движения. Иначе говоря, значение этой величины сохраняется со временем.

Законы сохранения играют в квантовой механике, пожалуй, еще большую роль, чем в механике классической. Действительно, они порождают «правила запрета», согласно которым система не может переходить из состояния $\{A = \mu_1\}$ в состояние $\{A = \mu_2\}$ при $\mu_1 \neq \mu_2$. Таков закон сохранения энергии (действительно, Γ коммутирует с Γ), закон сохранения полного момента импульса (в некоторых случаях спина), закон сохранения заряда, четности и т. д.

Поскольку законы сохранения связаны, как мы видим, с инвариантностью уравнения Шредингера относительно той или иной системы операторов, то естественно возникают алгебры и группы таких операторов (см. § 19), оставляющих это уравнение инвариантным *). Здесь физики невольно сталкиваются с тем фактом, что структурные законы данной алгебры или группы играют существенную роль в классификации решений волнового уравнения.

3. Аддитивные квантовые числа. Если имеются две физические системы с состояниями φ и ψ, то смешанная система определяется тензорным произведением векторов φ и ψ. Физическая величина называется аддитивной, если ее значение в смешанной системе равняется сумме значений в состояниях φ и ψ. Используя произвол в выборе физической величины (состоящий в том, что вместо A можно рассматривать некоторые функции $f(A)$), физики обычно стараются выявить аддитивные величины, как наиболее простые. Такими величинами являются, например, энергия и заряд. Однако полный момент импульса L, связанный с законами инвариантности относительно группы вращений SO(3), не является

---

*) Любопытно отметить, что законы сохранения заряда связаны с инвариантностью волнового уравнения относительно преобразований $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$, где $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. Здесь существенно, что волновая функция является комплексной.

аддитивным. Его сложение подчиняется закону спектра старших весов при тензорном умножении неприводимых представлений SO(3), т. е. сложение L_1 и L_2 приводит к возможным значениям вида $L_1 + L_2$, $L_1 + L_2 - 1$, ..., $|L_1 - L_2|$. См., например, [31′] *).

Здесь мы сталкиваемся с приложением в теоретической физике понятия тензорного произведения двух представлений некоторой группы G (например, группы вращений). Если волновые функции φ и ψ преобразуются соответственно по неприводимым представлениям α и β этой группы, то тензорное произведение $\varphi\psi$ преобразуется по правилу $\alpha \otimes \beta = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_m$, где правая часть означает прямую сумму неприводимых представлений. Это означает, что смешанная система может с той или иной вероятностью находиться в состояниях $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, преобразующихся согласно $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$. Соответствующие вероятности по определенному правилу вычисляются с помощью *коэффициентов Клебша — Гордана*. Таким образом, групповая структура здесь играет существенную роль.

Если физическая величина A является аддитивной, то ее собственные значения называются обычно аддитивными квантовыми числами.

4. Нарушение симметрии. Существенно отметить, что всякая симметрия в квантовой механике, как правило, является приближенной либо выполняется только в идеальных условиях. Так, симметрия относительно группы SO(3) возможна лишь в центрально-симметричном силовом поле. Пространственная симметрия молекул идеального газа возможна только при отсутствии силового поля. Наложение продольного магнитного поля изменяет форму гамильтониана и нарушает эту симметрию (сохраняя лишь симметрию поворота относительно выделенной оси).

Остановимся на последнем примере несколько подробнее. В отсутствие поля состояния молекулы газа могут характеризоваться неприводимым представлением группы SO(3) со старшим весом L. Всего, как мы знаем, имеется $2L + 1$ таких состояний. Все эти состояния отвечают одному и тому же собственному значению оператора Г, который в данном случае совпадает с оператором Казимира группы SO(3). Поскольку оператор Г является оператором массы-энергии **), то это означает также, что все $2L + 1$ состояний имеют один и тот же энергетический уровень (одну и ту же массу). Физики говорят в этом случае о «вырождении» (т. е. о кратности) собственного значения. Наложение магнитного поля приводит к тому, что все $2L + 1$ состояний уже становятся существенно различными. В частности, они находятся на разных энергетических уровнях. (Физики говорят в подобных случаях о «снятии вырождения».)

Описанный эффект известен под названием эффекта Зеемана и допускает наглядную иллюстрацию (расщепление спектральных линий в магнитном поле).

---

*) Однако проекция момента на некоторую фиксированную ось является аддитивной (сложение весов при тензорном произведении).

**) В силу эквивалентности (по Эйнштейну) массы и энергии.