

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание этой книги несколько отличается от традиционного понимания темы «Компактные группы Ли и их представления». Прежде всего, имея в виду читателей-физиков, автор стремился сделать изложение по возможности более элементарным. Это, в частности, привело к тому, что пришлось опустить ряд интересных и глубоких вопросов, связанных с топологией компактных групп Ли, а также с общей теорией соответствия между группами и алгебрами Ли. В то же время сравнительно подробно рассматриваются вопросы, имеющие приложение к современным задачам теоретической физики. Стремление к элементарности изложения сказалось также и в самом расположении материала (книга разбита на три части, в значительной степени независимые друг от друга, с постепенным возрастанием сложности изложения). С другой стороны, помимо компактных групп Ли в этой книге рассматриваются также группы иной топологической природы (которые связаны с компактными группами некоторым «соотношением родства»). Это прежде всего редуктивные комплексные группы Ли (в том числе полупростые), получаемые из компактных групп Ли путем аналитического продолжения, а также их вещественные формы (редуктивные вещественные группы Ли). Развивается теория конечномерных представлений для указанных классов групп, причем повсюду, где возможно, автор стремится подчеркнуть «компактную порожденность» этих представлений, т. е. их аналитические связи с представлениями компактных групп Ли. Рассматриваются также бесконечномерные представления полупростых комплексных алгебр Ли (гл. XVII). Некоторые аспекты теории бесконечномер-

ных представлений групп Ли излагаются в виде краткого обзора в добавлениях I и II.

Указанный подход к изложению данной темы в то же время, конечно, не является совершенно новым; он следует традициям известной монографии Г. Вейля «Классические группы, их инварианты и представления» (в которой автор, оставляя в стороне «горные массивы топологии», в значительной степени ориентируется на проблемы развивающейся квантовой механики). Название нашей книги выбрано не случайно; оно отражает преемственность и стремление автора дать современные комментарии хотя бы к некоторым разделам классической книги Вейля. Действительно, с момента выхода этой книги (1939 г.) прошло уже около 30 лет. С тех пор достигнута известная завершенность как в структурной теории компактных групп Ли, так и в общей теории их линейных представлений. Это, в частности, позволяет подходить к теории представлений не инфинитезимально, как это делалось в первоначальных работах Э. Картана и Г. Вейля, а глобально, т. е. с точки зрения группы в целом.

Понятие группы существенно связано с понятием симметрии, будь то симметрия фигуры относительно некоторых геометрических преобразований или симметрия уравнений относительно функциональных преобразований в классе переменных. Первоначально простейшие (конечные) группы были введены в математику Эваристом Галуа (1832 г.) в связи с вопросами симметрии алгебраического уравнения относительно подстановок его корней. Софус Ли имел своей целью построение аналогичной теории для дифференциальных уравнений с непрерывными группами преобразований; в результате возникла специальная теория определенного класса непрерывных групп, называемых теперь группами Ли. Геометрическим группам преобразований отводится принципиальная роль в знаменитой «Эрлангенской программе» Ф. Клейна. Известные работы Э. Картана и Г. Вейля посвящены классификации геометрических объектов (тензоров, спиноров) относительно некоторых групп преобразований; этими работами, по существу, завершается классический этап в развитии теории групп Ли и их

представлений. В дальнейших исследованиях, с одной стороны, уделялось особое внимание топологии группового пространства (Р. Брауэр, Г. Вейль, Л. С. Понtryгин, К. Шевалле, А. И. Мальцев и др.), что позволило дать законченную классификацию важнейших типов групп Ли и их конечномерных представлений. С другой стороны, с начала 50-х годов, после известных работ И. М. Гельфанд и М. А. Наймарка, происходит интенсивное развитие теории бесконечномерных представлений (не только групп Ли, но также более широкого класса локально компактных групп). Эти вопросы в свою очередь связаны с вопросами симметрии в современной квантовой теории поля.

Теория групп Ли в современном понимании в значительной степени связана с теорией линейных представлений. Понятие представления, или «обобщенной экспоненты», позволяет проследить глубокую связь между такими, казалось бы, различными вопросами, как теория тензоров и гармонический анализ (ряды и интегралы Фурье). Алгебраические основы этой теории были заложены Г. Фробениусом на рубеже XX века; уже тогда было ясно, что эта теория имеет тесную связь с теорией ассоциативных алгебр, которая постепенно занимает одно из главнейших мест в современной математике. Современная теория представлений в значительной степени может быть интерпретирована как абстрактный гармонический анализ. Если ограничиться компактными группами Ли, то мы получаем замечательное обобщение классической теории рядов Фурье, где «обобщенные экспоненты» специального типа (неприводимые представления) играют роль элементарных гармоник. В настоящее время хорошо известно, что таким путем может быть получена универсальная теория специальных функций математической физики. Дальнейшее развитие этой теории, несомненно, будет происходить под влиянием квантовой теории поля.

Несмотря на то, что с момента создания теории относительности (А. Эйнштейном) принципиальная роль теории групп в теоретической физике стала очевидной, физики долгое время игнорировали общую теорию групп Ли, ограничиваясь рассмотрением некоторых конечных

групп (кристаллография), группы движений трехмерного евклидова пространства и группы Лоренца. Положение резко изменилось за последние годы благодаря замечательным успехам теоретико-группового подхода в классификации элементарных частиц. Классификация адронов и предсказание  $\Omega$ -частицы на основе этого подхода показали, что методы теории групп позволяют установить определенные закономерности в «хаосе» элементарных частиц, т. е. в той области, где даже неизвестны уравнения динамики (но известны некоторые свойства симметрии). Более подробному обзору этих результатов посвящается в нашей книге добавление III.

Эта книга возникла из курса лекций, прочитанных автором для физиков-теоретиков Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна) в январе — феврале 1965 г. (Однако идея написания книги появилась еще в 1961 г., когда автору удалось предложить некоторое за-конченное описание для неприводимых представлений связных групп Ли в конечномерных векторных пространствах, по аналогии с индуцированными представлениями Гельфанд — Наймарка.) Автор отдает себе отчет в том, что лекционный характер изложения в значительной степени сохранился в этой книге; соответственно эта книга ни в коей мере не претендует на роль учебника или систематической монографии. Автор считал бы свою задачу выполненной, если бы эта книга подготовила читателя к чтению более специальной математической литературы.

Относительно вопросов, лишь частично затронутых в этой книге, мы сошлемся на известные монографии Л. С. Понтрягина [38], К. Шевалле [46], Н. Джекобсона [19], Ж.-П. Серра [40] по общей теории групп и алгебр Ли, на книгу С. Хелгасона [42] по теории симметрических пространств, а также на недавно вышедшую книгу Н. Я. Виленкина [14] по групповой теории специальных функций. В нашем тексте мы почти не затрагиваем теорию специальных функций; однако алгебраический аппарат, развиваемый в этой книге, может быть положен в основу этой общей теории.

Несмотря на то, что физиков в первую очередь интересуют не доказательства, а сводки результатов, автор

всюду стремился проследить внутренние связи развивающейся теории. Более того, местами мы используем «многоплановое» изложение, т. е. получаем один и тот же результат различными способами. Здесь сказалось убеждение автора в том, что для творческой работы с аппаратом теории групп необходимо знакомство не только с результатами, но и с методами этой теории.

Автор пользуется случаем выразить благодарность проф. М. А. Наймарку и А. И. Штерну, критические замечания которых значительно содействовали улучшению рукописи этой книги.

Москва,  
1 марта 1968 г.

Д. Желобенко