ГЛАВА I

ОПИСАНИЕ СРЕДЫ ИЗ УПОРЯДОЧЕННО ДВИЖУЩИХСЯ ЧАСТИЦ (КИНЕМАТИКА)

Пусть некоторая частица движется вдоль оси x; закон ее движения выражается уравнением $x=x(t)$. Этот закон определяет всю кинематику частицы, т. е. все характеристики ее механического перемещения — скорость и ускорение в любой момент времени, частоту колебаний, если частица колеблется, и т. д.

Если вдоль оси x движется несколько частиц — например, четыре, то закон движения такой системы частиц выражается системой равенств

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ x_3=x_3(t),\ x_4=x_4(t),$$

где индекс указывает номер частицы, к которой относится равенство.

Но как быть, если число частиц весьма велико, например, имеет порядок 10^{10}? Не только на бумаге, но и в памяти самой мощной электронной вычислительной машины нельзя записать такое количество равенств, да и если удалось бы их записать, все равно с ними ничего нельзя было бы делать. Здесь приходится воспользоваться принципиально иным способом описания системы частиц, с рассмотрения которого мы начинаем эту книгу.

В этой главе мы будет рассматривать только *упорядоченные движения* системы частиц, т. е. движения, при которых близкие частицы имеют близкие скорости (при заданном положении частицы нет рассеивания по скорости). Такими частицами могут при определенной схематизации служить капли дождя, песчинки в мутном потоке, метеориты в рое, электроны в электронном облаке, даже небольшие мысленно выделенные порции текущей жидкости (но, конечно, не хаотически, неупорядоченно движущиеся молекулы газа или жидкости; подобные случайные движения мы рассмотрим в гл. V).

§ 1. Среда из частиц

Мы не будем рассматривать движение системы из двух, трех или другого конечного (т. е., практически,— не очень большого) числа частиц, а перейдем сразу к случаю очень большого числа N малых частиц, упорядоченно движущихся вдоль оси x. При рассмотрении такой системы частиц естественно не называть их по номерам, а воспользоваться каким-либо параметром, принимающим непрерывные значения. Допустим, например, что каждая частица имеет определенную температуру ϑ, свою для каждой частицы и не меняющуюся в процессе движения. Тогда ϑ может принимать дискретное множество значений $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N$, в соответствии с числом частиц; однако если N велико, то можно с достаточной точностью считать, что ϑ может принимать произвольные значения из некоторого интервала, другими словами, что ϑ является не дискретной, а непрерывной величиной. Для простоты будем считать, что при переходе вдоль оси x от частицы к частице температура ϑ изменяется монотонно; тогда закон движения системы будет выражаться не совокупностью очень большого числа функций $x=x_1(t)$, $x=x_2(t), \ldots, x=x_N(t)$, а одной функцией

$$x=x(\vartheta, t) \tag{1}$$

от двух непрерывных переменных, что, конечно, гораздо проще. При этом переменная ϑ дает возможность распознать частицу, имеющую данное значение температуры ϑ, так что при зафиксированном ϑ зависимость $x|_{\vartheta=\text{const}}$ от времени t дает закон движения этой частицы.

Как мы увидим позже, зависимость (1) иногда получается из теоретических соображений; но ее можно получить и эмпирически, замеряя зависимость $\vartheta(x)$ (или, что равносильно, $x(\vartheta)$) в последовательные моменты времени $t=t_1, t_2, \ldots$ Если известно, что температура каждой частицы остается неизменной, то, дифференцируя равенство $\vartheta(x, t)=\text{const}$ по t, получаем

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_t \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_\vartheta + \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right|_x = 0, \quad \text{т. е.} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_\vartheta = -\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right|_x : \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_t, \tag{2}$$

где индекс при вертикальной черточке указывает, какая переменная в процессе дифференцирования считается постоянной. Формула (2) дает, в частности, возможность на основании данных эксперимента по замеру ϑ вычислять скорости частиц.

Описание движения системы частиц с помощью функции (1), хоть в принципе и возможно, но не совсем удобно как из-за случайного выбора переменной ϑ (как говорят, не вполне адекватной исследуемому вопросу), так и из-за того, что разные частицы, удаленные друг от друга, могут иметь одинаковую температуру; тогда функция (1) получится многозначной. Более естественно за параметр, определяющий частицу, принять ее координату $x=\xi$ в некоторый фиксированный начальный момент времени $t=t_0$ — так называемую *лагранжеву координату*. Конечно, при этом, как и выше для переменной ϑ, используется предположение об упорядоченности движения частиц, из которого следует, что эта координата полностью определяет частицу. Тогда закон движения совокупности частиц определится функцией $x=x(\xi, t)$.

Переходя к непрерывным значениям параметров ϑ, ξ и т. д., мы заменяем *дискретную систему* из большого числа частиц на ее *непрерывную модель*, другими словами, на *поле* (*сплошную среду*, *континуум*), изучая которое, мы сможем сделать выводы и о свойствах исходной системы *).

Конечно, такая замена лишь приближенная: дискретная система имеет лишь черты поля, которые проявляются тем ярче, чем больше частиц. Если же частиц весьма много, то эти черты настолько преобладают, что математическая схематизация системы в виде поля становится не только естественной, но даже совершенно необходимой. Однако при рассмотрении этого поля мы будем часто вспоминать о его происхождении, что поможет нам более наглядно истолковать его свойства. Эта двойственность, состоящая в том, что один и тот же объект трактуется то как дискретная система, то как поле, и породила примененное нами, на первый взгляд парадоксальное наименование *среда из частиц*. Более того, взаимосвязь дискретной системы и имитирующего ее поля позволяет более естественно подойти и к свойствам полей, континуальных по своему происхождению (во всяком случае, при классической их трактовке), таких как электромагнитное или гравитационное.

§ 2. Плотность и скорость среды

При переходе от системы из большого числа частиц к сплошной среде естественно ввести понятие *линейной плотности среды*

$$\rho=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{dm}{dx},$$

т. е. массы порции частиц, приходящейся на малый участок оси x, отнесенной к единице длины этого участка. Эта плотность будет, вообще говоря, различной в разных точках оси x и в разные моменты времени t, т. е. $\rho=\rho(x, t)$. Она отвечает некоторому непрерывному распределению массы вдоль оси x: его можно получить с помощью интегрирования, т. е. каждому интервалу $a\leqslant x\leqslant b$ в любой момент t отвечает масса

$$m_{a,b}=\int_a^b \rho(x, t)\,dx.$$

Это масса участка среды, на которую мы заменили дискретную систему частиц.

---

*) Это в принципе тот же переход, что был совершен в § XII.1 ЭПМ, где мы в пределе заменили цепочку из частиц, последовательно связанных друг с другом пружинками, на непрерывную струну.