ределяет частицу. Тогда закон движения совокупности частиц определится функцией $x=x(\xi, t)$.

Переходя к непрерывным значениям параметров ϑ, ξ и т. д., мы заменяем *дискретную систему* из большого числа частиц на ее *непрерывную модель*, другими словами, на *поле* (*сплошную среду*, *контúнуум*), изучая которое, мы сможем сделать выводы и о свойствах исходной системы *).

Конечно, такая замена лишь приближенная: дискретная система имеет лишь черты поля, которые проявляются тем ярче, чем больше частиц. Если же частиц весьма много, то эти черты настолько преобладают, что математическая схематизация системы в виде поля становится не только естественной, но даже совершенно необходимой. Однако при рассмотрении этого поля мы будем часто вспоминать о его происхождении, что поможет нам более наглядно истолковать его свойства. Эта двойственность, состоящая в том, что один и тот же объект трактуется то как дискретная система, то как поле, и породила примененное нами, на первый взгляд парадоксальное наименование *среда из частиц*. Более того, взаимосвязь дискретной системы и имитирующего ее поля позволяет более естественно подойти и к свойствам полей, континуальных по своему происхождению (во всяком случае, при классической их трактовке), таких как электромагнитное или гравитационное.

§ 2. Плотность и скорость среды

При переходе от системы из большого числа частиц к сплошной среде естественно ввести понятие *линейной плотности среды*

$$\rho=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{dm}{dx},$$

т. е. массы порции частиц, приходящейся на малый участок оси x, отнесенной к единице длины этого участка. Эта плотность будет, вообще говоря, различной в разных точках оси x и в разные моменты времени t, т. е. $\rho=\rho(x, t)$. Она отвечает некоторому н е п р е р ы в н о м у распределению массы вдоль оси x: его можно получить с помощью интегрирования, т. е. каждому интервалу $a\leqslant x\leqslant b$ в любой момент t отвечает масса

$$m_{a,b}=\int_a^b \rho(x, t)\,dx.$$

Это масса участка среды, на которую мы заменили дискретную систему частиц.

*) Это в принципе тот же переход, что был совершен в § XII.1 ЭПМ, где мы в пределе заменили цепочку из частиц, последовательно связанных друг с другом пружинками, на непрерывную струну.

При рассмотрении вопросов, связанных с упорядоченным перемещением частиц,— и особенно позже, когда мы будем рассматривать динамику частиц, их движение под действием сил,— плотность среды является более глубокой ее характеристикой, чем, например, температура, о которой говорилось в § 1. Поэтому плотность среды будет встречаться в дальнейшем особенно часто. Плотностью среды из частиц особенно удобно пользоваться для характеристики этой среды, если все эти частицы тождественны, как мы пока будем предполагать. (Если имеются частицы разных «сортов», то знание общей плотности допускает различные пропорции компонент, и потому иногда необходимо указывать плотности отдельных компонент.)

Наряду с плотностью массы можно рассматривать плотность заряда, если частицы заряжены, плотность энергии и т. п. Обобщая эти частные случаи, мы приходим к понятию о плотности любого *интегрального параметра* среды. При этом интегральным параметром может служить любая величина, характеризующая каждую мысленно выделенную порцию среды и удовлетворяющая закону аддитивности (закону сложения): если порция разбита на несколько частей, то значение параметра, отвечающее всей порции, равно сумме его значений, отвечающих каждой из частей. Примерами интегральных параметров служат масса, объем, заряд, энергия, количество движения, момент инерции и т. д. Понятию интегрального параметра противопоставляется понятие *локального*, т. е. местного *параметра*, свойственного только элементу среды; локальными параметрами являются координаты, температура и т. п. Плотность любого интегрального параметра представляет собой локальный параметр, она получается в результате дифференцирования интегрального параметра по координатам. Обратно, интегрируя локальный параметр по координатам, мы получаем интегральный параметр среды.

Можно, в частности, рассматривать и «плотность $n=\frac{dN}{dx}$ числа частиц», равную числу частиц на малом участке оси x, отнесенному к единице длины этого участка. Это понятие как бы синтезирует дискретный (так как рассматривается N) и непрерывный (так как N дифференцируется по x) подходы к системе. Здесь, как и раньше, dx должно быть малым по сравнению с характерной длиной L всей системы, но бо́льшим по сравнению с характерным расстоянием L/N между соседними частицами. Если все частицы имеют одинаковую массу m_0, то $dm=m_0dN$, откуда $n=\frac{dN}{dx}=\frac{1}{m_0}\frac{dm}{dx}=\frac{\rho}{m_0}$, т. е. плотность числа частиц пропорциональна обычной, массовой плотности.

Знание распределения плотности ρ среды в некоторый момент времени ничего не говорит о распределении скорости v частиц в этот момент, оно может быть произвольным. Поэтому при описании упорядоченного движения среды принято считать, что ее *состояние* в некоторый момент времени определяется заданием как плотности $\rho(x)$, так и скорости $v(x)$. (В подавляющем большинстве задач ускорение частицы однозначно определяется ее координатой и скоростью; поэтому ускорение $a(x)$ в понятие состояния обычно не входит.)

Если задана зависимость плотности также и от времени, т. е. $\rho=\rho(x,t)$, то скорость $v(x, t)$, конечно, не может быть произвольной. Однако она определяется не полностью и потому должна быть задана: например, если $\rho(x, t)\equiv\text{const}$, то все частицы могут покоиться, но могут и двигаться вдоль оси x с одной и той же скоростью, даже зависящей от времени (но не от номера частицы!), образуя однородный поток.

§ 3. Переменные Эйлера и Лагранжа

При описании эволюции среды из частиц мы пользовались в § 2 независимыми переменными x, t; они называются *переменными Эйлера*. Полагая в функциях $\rho(x, t)$, $v(x, t)$ значение $t=\text{const}$, мы получаем состояние системы в выбранный момент времени; полагая же $x=\text{const}$, но считая t переменным, мы следим за эволюцией локального состояния системы в выбранной точке оси x. При этом мы не следим за судьбой отдельных частиц. Если все же нас интересует закон движения частиц, а функция $v(x, t)$ известна, то этот закон можно восстановить, решая дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=v(x, t); \tag{1}$$

при этом различным начальным условиям

$$x|_{t=t_0}=\xi \tag{2}$$

отвечают законы движения различных частиц

$$x=x(t;\ \xi)$$

(значение t_0 считаем фиксированным, поэтому зависимость решения от t_0 не указываем). Таким образом, различные частицы характеризуются различными значениями ξ; об этом мы уже говорили в § 1.

Чтобы следить за поведением отдельных частиц, удобнее пользоваться независимыми *переменными Лагранжа* ξ, t, где ξ согласно (2) служит начальной координатой частицы. Тогда эволюция среды будет описываться функциями

$$x(\xi, t),\ v(\xi, t),\ \rho(\xi, t). \tag{3}$$

Полагая $\xi=\text{const}$, но считая t переменным, мы следим за эволюцией состояния малой порции среды «вдоль движущейся частицы». (Продумайте, что получится при $t=\text{const}$.)