этот момент, оно может быть произвольным. Поэтому при описании упорядоченного движения среды принято считать, что ее *состояние* в некоторый момент времени определяется заданием как плотности $\rho(x)$, так и скорости $v(x)$. (В подавляющем большинстве задач ускорение частицы однозначно определяется ее координатой и скоростью; поэтому ускорение $a(x)$ в понятие состояния обычно не входит.)

Если задана зависимость плотности также и от времени, т. е. $\rho=\rho(x,t)$, то скорость $v(x, t)$, конечно, не может быть произвольной. Однако она определяется не полностью и потому должна быть задана: например, если $\rho(x, t)\equiv\mathrm{const}$, то все частицы могут покоиться, но могут и двигаться вдоль оси x с одной и той же скоростью, даже зависящей от времени (но не от номера частицы!), образуя однородный поток.

§ 3. Переменные Эйлера и Лагранжа

При описании эволюции среды из частиц мы пользовались в § 2 независимыми переменными x, t; они называются *переменными Эйлера*. Полагая в функциях $\rho(x, t)$, $v(x, t)$ значение $t=\mathrm{const}$, мы получаем состояние системы в выбранный момент времени; полагая же $x=\mathrm{const}$, но считая t переменным, мы следим за эволюцией локального состояния системы в выбранной точке оси x. При этом мы не следим за судьбой отдельных частиц. Если все же нас интересует закон движения частиц, а функция $v(x, t)$ известна, то этот закон можно восстановить, решая дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=v(x, t); \tag{1}$$

при этом различным начальным условиям

$$x|_{t=t_0}=\xi \tag{2}$$

отвечают законы движения различных частиц

$$x=x(t;\ \xi)$$

(значение t_0 считаем фиксированным, поэтому зависимость решения от t_0 не указываем). Таким образом, различные частицы характеризуются различными значениями ξ; об этом мы уже говорили в § 1.

Чтобы следить за поведением отдельных частиц, удобнее пользоваться независимыми *переменными Лагранжа* ξ, t, где ξ согласно (2) служит начальной координатой частицы. Тогда эволюция среды будет описываться функциями

$$x(\xi, t),\ v(\xi, t),\ \rho(\xi, t). \tag{3}$$

Полагая $\xi=\mathrm{const}$, но считая t переменным, мы следим за эволюцией состояния малой порции среды «вдоль движущейся частицы». (Продумайте, что получится при $t=\mathrm{const}$.)

Из сказанного вытекает простое соотношение между функциями (3):

$$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\xi=\mathrm{const}} = v, \quad \text{т. е.} \quad x'_t(\xi, t) = v(\xi, t). \tag{4}$$

Поэтому, если поле скоростей в переменных Лагранжа $v(\xi, t)$ известно, то закон движения любой частицы получается по формуле

$$x(\xi, t) = x\Big|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t} dx\Big|_{\xi=\mathrm{const}} = \xi + \int_{t_0}^{t} v(\xi, \tau)\, d\tau.$$

Конечно, в переменных Эйлера такого простого перехода от заданного поля скоростей к закону движения отдельных частиц не получится: для этого перехода надо решить дифференциальное уравнение (1), что часто осуществить в квадратурах не удается.

Надо отчетливо представлять себе, что хотя t в переменных Эйлера и Лагранжа одно и то же, но производная по t в переменных Эйлера, вообще говоря, не равна аналогичной производной в переменных Лагранжа, т. е., как правило,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{x=\mathrm{const}} \neq \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\xi=\mathrm{const}}!$$

(Подробнее по этому поводу см. в ЭПМ, § IV.1.) Чтобы различить эти производные, принято частную производную по t в переменных Лагранжа называть *производной вдоль траектории частицы* или *полной производной по времени* и обозначать через $\frac{d}{dt}$ или D, оставив обозначение $\frac{\partial}{\partial t}$ для частной производной в переменных Эйлера. Обозначение $\frac{d}{dt}$ отвечает и исходной записи уравнения (1), в левой части которого производная берется при фиксированном ξ.

Установим связь между производными по времени в координатах Эйлера и Лагранжа. Для этого допустим, что рассматривается некоторая величина ϑ, являющаяся локальным параметром изучаемой среды, т. е. принимающая для малой порции среды в каждой точке x в каждый момент времени t определенное значение $\vartheta(x, t)$. Другими словами, рассматривается поле значений величины ϑ. Для определенности будем считать, что ϑ — это температура, которую можно замерить в любой точке среды в любой момент времени. (Конечно, в качестве ϑ можно было бы взять плотность или скорость среды; но нам хотелось подчеркнуть, что сейчас будет рассматриваться л ю б а я локальная характеристика среды.)

Поле величины ϑ можно исследовать как в эйлеровых координатах, так и в лагранжевых, т. е. можно исследовать как зависимость $\vartheta(x, t)$, так и зависимость $\vartheta(\xi, t)$. Говоря образно, рассматривая зависимость $\vartheta(t)|_{x=\text{const}}$, мы измеряем температуру воды в реке, сидя на берегу, тогда как рассматривая зависимость $\vartheta(t)|_{\xi=\text{const}}$, мы проводим наблюдение, сидя на свободно плывущем плоту.

Продифференцируем обе части равенства $\vartheta=\vartheta(x, t)$ по времени t в лагранжевых координатах, т. е. при фиксированном ξ, воспользовавшись в правой части хорошо известной формулой для дифференцирования сложной функции (см., например, ЭПМ, § IV.1):

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\bigg|_{\xi}=\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\bigg|_{t}\frac{\partial x}{\partial t}\bigg|_{\xi}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\bigg|_{x}\frac{\partial t}{\partial t}\bigg|_{\xi};$$

здесь индексы при производных указывают на те величины, которые считаются в процессе дифференцирования постоянными. Применяя обозначения производных по времени в координатах Эйлера и Лагранжа, а также формулу (4), получаем

$$\frac{d\vartheta}{dt}=v\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}. \tag{5}$$

Легко написать и обратную формулу:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=\frac{d\vartheta}{dt}-v\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\bigg|_{t}=\frac{d\vartheta}{dt}-v\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\bigg|_{t}\frac{\partial\xi}{\partial x}\bigg|_{t}=\frac{d\vartheta}{dt}-v\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} \tag{6}$$

(продумайте эти вычисления; почему $\frac{\partial\xi}{\partial x}=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}$?).

Производная $\frac{\partial x}{\partial\xi}$ имеет простой смысл: ее абсолютная величина $\left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|$ равна *коэффициенту растяжения* (*коэффициенту искажения длины*) малого участка среды за время от t_0 до t, а знак производной $\frac{\partial x}{\partial\xi}$ — плюс, если при этом порядок следования частиц сохраняется, и минус, если этот порядок меняется на противоположный. Отсюда, в частности, вытекает формула для изменения плотности элемента среды, если его масса в процессе эволюции не изменяется: так как в любой момент t будет $dm=\rho(x, t)\,|dx|=\rho(\xi, t_0)|\,d\xi\,|=\text{const}$, то

$$\rho(x, t)=\rho(\xi, t_0)\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|=\rho(\xi, t_0)\left|\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|^{-1}. \tag{7}$$

Отметим, что в момент $t=t_0$ будет $x=\xi$, $\frac{\partial x}{\partial\xi}=1$, т. е. получается $\rho(x, t)=\rho(\xi, t_0)$, как и должно быть.

Рассмотрим несколько важных частных случаев. Пусть сначала температура ϑ каждого малого участка среды в процессе его эволюции не меняется, т. е. в лагранжевых координатах ϑ не зависит от t, $\vartheta=\vartheta(\xi)$; другими словами,

$$\frac{d\vartheta}{dt}=0.$$

Мы уже упоминали в § 1, что в этом случае значение ϑ можно использовать для указания частицы (точнее, бесконечно малой порции частиц). Если зависимость $\vartheta(\xi)$ известна и $\vartheta(\xi) \neq \mathrm{const}$, то с помощью измерения ϑ можно непосредственно определить значение лагранжевой координаты в любой точке x в любой момент времени t. (В общем случае лагранжева координата не проявляется так наглядно.) Если же принять за лагранжеву координату ϑ вместо ξ, что в принципе возможно, то эту координату можно будет непосредственно измерять.

Хотя в рассматриваемом случае температура каждой малой порции частиц остается неизменной, но для неподвижного наблюдателя температура среды будет, вообще говоря, меняться, так как перед ним проносятся новые и новые порции частиц с различными ϑ. Из формулы (5) видно, что при $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ будет $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -v\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$. Эта формула ясна и из рис. 1, где показаны графики зависимости $\vartheta(x)$ в последовательные моменты времени t и $t+dt$: так как $\frac{DC}{AC} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, то

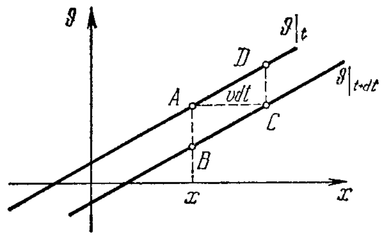

Рис. 1

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{AB}{dt} = -\frac{DC}{dt} = -\frac{AC}{dt}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -v\frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

Рассмотрим другой частный случай, когда поле ϑ — *однородное*, т. е. одинаковое во всех точках среды и величина ϑ может зависеть лишь от времени; другими словами, $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$ или, что равносильно, $\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0$. Тогда из формулы (5) получаем, что

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \tag{8}$$

Этот результат очевиден, так как при измерении однородного поля перемещение точки измерения не играет роли. Отметим, что в этом частном, вырожденном случае использовать ϑ в качестве переменной Лагранжа нельзя, даже если значение ϑ для каждой частицы остается постоянным (почему?).

Рассмотрим, наконец, случай, когда поле ϑ — *стационарное*, в каждой неподвижной точке температура не меняется, т. е. в эйлеровых координатах ϑ не зависит от t, $\vartheta = \vartheta(x)$, другими словами,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0.$$

Тогда формула (5) дает:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = v\frac{\partial\vartheta}{\partial x}. \tag{9}$$

Этот результат тоже легко понять: если частица за единицу времени проходит v единиц пути, а за единицу пути температура среды повышается на $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ градусов, то в результате за единицу времени температура, измеряемая по ходу движения частицы, повысится на $v\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ градусов. Подчеркнем, что в данном случае температура в каждой неподвижной точке измерения остается неизменной, но, вообще говоря, различной в разных точках; изменение температуры вдоль траектории частицы объясняется тем, что частица переходит из менее нагретой части оси x в более нагретую или наоборот и принимает температуру той части оси, куда частица перешла. Таким образом, в случае $\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = 0$ $\left(\text{в отличие от } \frac{d\vartheta}{dt} = 0!\right)$ происходит теплообмен частиц друг с другом или с окружающими их объектами, однако этот теплообмен имеет специальный характер, обеспечивающий равенство производной $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ нулю; вообще говоря, при наличии теплообмена будет не только $\frac{d\vartheta}{dt} \neq 0$, но и $\frac{\partial\vartheta}{\partial t} \neq 0$.

В общем случае, когда $\vartheta = \vartheta(x, t)$, действуют два фактора: например, частица может переходить в более нагретую часть оси x, разогреваясь уже из-за этого перехода, и, кроме того, сама среда в рассматриваемых точках оси x может разогреваться; в результате из формул (9) и (8) получается формула (5). На рис. 2 показан пунктиром график движения частицы и обозначены значения поля ϑ, с отброшенными малыми высшего порядка, причем размеры dx и dt для наглядности преувеличены по сравнению с истинными. Из рис. 2 также легко вывести формулу (5).

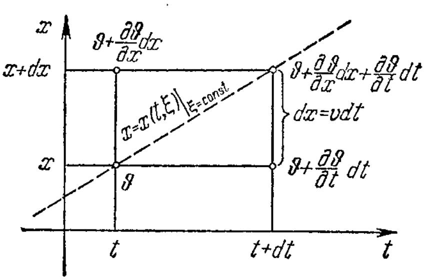

Рис. 2.

Иногда взамен координаты ξ бывает удобнее выбрать координату, пропорциональную числу частиц, заключенных между некоторой отмеченной (отвечающей значению $\xi=\xi_0$) и произвольной текущей частицами. Такой координатой может служить масса этой порции частиц

$$m = \int_{\xi_0}^{\xi} \rho(\xi, t_0)\, d\xi.$$

Через эту координату хорошо выражаются такие физические характеристики, как суммарные кинетическая энергия $T=\frac{1}{2}\int[v(m,\ t)]^2dm$, импульс $P=\int v(m,\ t)\,dm$ и т. д. Применение координат $m,\ t$ в принципе не отличается от применения координат Лагранжа $\xi,\ t$, однако координата m удобна лишь при рассмотрении одномерных задач!

Упражнения

1. Пусть $v(x,\ t)\equiv t$, $t_0=0$; найдите $x(t;\ \xi)$.
2. Пусть $v(x,\ t)\equiv x$, $t_0=0$; найдите $x(t;\ \xi)$.
3. Пусть $v(x,\ t)=xt$, $t_0=0$; найдите $v(\xi,\ t)$.
4. Пусть $v(\xi,\ t)=\xi+t$, $t_0=0$; найдите $v(x,\ t)$.
5. Пусть $\vartheta(x,\ t)=x/t$. Найдите в условиях упражнения 1 $\vartheta(\xi,\ t)$ и проверьте формулу (5).
6. Пусть $v=v_0$, $\vartheta=ax+bt$ (v_0, a, $b=\mathrm{const}$), $t_0=0$. При каких соотношениях между v_0, a, b будет $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=0$? $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=0$? $\frac{d\vartheta}{dt}=0$? $\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}=0$?
7. Считая функцию $v(x,\ t)$ (для всех $x,\ t$) и траекторию $x_0(t)=x(t;\ \xi_0)$ некоторой частицы заданными, найдите производные от переменных Эйлера по переменным Лагранжа вдоль этой траектории.
8. Примените упражнение 7 к случаю $v=\sin(xt)$, $t_0=0$, $\xi_0=0$.
9. Выведите формулу (6), продифференцировав равенство $\vartheta=\vartheta(\xi,\ t)$ по t при зафиксированном x.

§ 4. Среда на плоскости или в пространстве

Остановимся для наглядности на плоских средах. Закон движения частицы на плоскости описывается уравнением $P=P(t)$, где $P(t)$ — текущая точка, в которой в момент t расположена частица. Для математического анализа этого закона (в частности, для численных расчетов — в том числе на ЭЦВМ) удобно ввести на плоскости координаты, например, декартовы координаты $x,\ y$ с началом координат O; тогда закон движения запишется в виде системы уравнений $x=x(t)$, $y=y(t)$ или в векторном виде $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, где $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$ — радиус-вектор.

Если рассматривается система из большого числа частиц на плоскости, то аналогично §§ 1—2 можно ее приближенно заменить на сплошную среду, характеризуемую плотностью $\rho(P,\ t)=\rho(\boldsymbol{r},\ t)=\rho(x,\ y,\ t)$*) и скоростью

$$\boldsymbol{v}(P,\ t)=v_x(x,\ y,\ t)\,\boldsymbol{i}+v_y(x,\ y,\ t)\,\boldsymbol{j},\tag{1}$$

где v_x, v_y — проекции вектора $\boldsymbol{v}$ на оси x и y соответственно, а $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}$ — единичные векторы, параллельные этим осям. Переменные $x,\ y,\ t$ — это координаты Эйлера для плоского потока.

*) Здесь размерность плотности $[\rho]=[m][l]^{-2}$; при рассмотрении среды на прямой (§ 2) $[\rho]=[m][l]^{-1}$, а при рассмотрении среды в пространстве $[\rho]=[m][l]^{-3}$.