Через эту координату хорошо выражаются такие физические характеристики, как суммарные кинетическая энергия $T=\frac{1}{2}\int[v(m, t)]^2dm$, импульс $P=\int v(m, t)\,dm$ и т. д. Применение координат m, t в принципе не отличается от применения координат Лагранжа ξ, t, однако координата m удобна лишь при рассмотрении одномерных задач!

Упражнения

1. Пусть $v(x, t)\equiv t$, $t_0=0$; найдите $x(t; \xi)$.
2. Пусть $v(x, t)\equiv x$, $t_0=0$; найдите $x(t; \xi)$.
3. Пусть $v(x, t)=xt$, $t_0=0$; найдите $v(\xi, t)$.
4. Пусть $v(\xi, t)=\xi+t$, $t_0=0$; найдите $v(x, t)$.
5. Пусть $\vartheta(x, t)=x/t$. Найдите в условиях упражнения 1 $\vartheta(\xi, t)$ и проверьте формулу (5).
6. Пусть $v=v_0$, $\vartheta=ax+bt$ (v_0, a, $b=\text{const}$), $t_0=0$. При каких соотношениях между v_0, a, b будет $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=0$? $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=0$? $\frac{d\vartheta}{dt}=0$? $\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}=0$?
7. Считая функцию $v(x, t)$ (для всех x, t) и траекторию $x_0(t)=x(t; \xi_0)$ некоторой частицы заданными, найдите производные от переменных Эйлера по переменным Лагранжа вдоль этой траектории.
8. Примените упражнение 7 к случаю $v=\sin(xt)$, $t_0=0$, $\xi_0=0$.
9. Выведите формулу (6), продифференцировав равенство $\vartheta=\vartheta(\xi, t)$ по t при зафиксированном x.

§ 4. Среда на плоскости или в пространстве

Остановимся для наглядности на плоских средах. Закон движения частицы на плоскости описывается уравнением $P=P(t)$, где $P(t)$ — текущая точка, в которой в момент t расположена частица. Для математического анализа этого закона (в частности, для численных расчетов — в том числе на ЭЦВМ) удобно ввести на плоскости координаты, например, декартовы координаты x, y с началом координат O; тогда закон движения запишется в виде системы уравнений $x=x(t)$, $y=y(t)$ или в векторном виде $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, где $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$ — радиус-вектор.

Если рассматривается система из большого числа частиц на плоскости, то аналогично §§ 1—2 можно ее приближенно заменить на сплошную среду, характеризуемую плотностью $\rho(P, t)=\rho(\boldsymbol{r}, t)=$ $=\rho(x, y, t)$*) и скоростью

$$\boldsymbol{v}(P, t)=v_x(x, y, t)\,\boldsymbol{i}+v_y(x, y, t)\,\boldsymbol{j}, \tag{1}$$

где v_x, v_y — проекции вектора $\boldsymbol{v}$ на оси x и y соответственно, а $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ — единичные векторы, параллельные этим осям. Переменные x, y, t — это координаты Эйлера для плоского потока.

*) Здесь размерность плотности $[\rho]=[m][l]^{-2}$; при рассмотрении среды на прямой (§ 2) $[\rho]=[m][l]^{-1}$, а при рассмотрении среды в пространстве $[\rho]=[m][l]^{-3}$.

Подобно одномерному случаю, можно пользоваться координатами Лагранжа ξ, η, t, где ξ, η — координаты частицы в некоторый фиксированный начальный момент t_0. Если поле скоростей (1) известно, то траектории частиц получаются с помощью решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=v_x(x,\ y,\ t),\quad \frac{dy}{dt}=v_y(x,\ y,\ t)$$

при начальном условии

$$x\,|_{t=t_0}=\xi,\quad y\,|_{t=t_0}=\eta;$$

соответствующие формулы для решения

$$x=x(t;\ \xi,\ \eta),\ y=y(t;\ \xi,\ \eta)$$

одновременно являются формулами перехода от лагранжевых координат к эйлеровым. Если же скорость задана в лагранжевых координатах, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\xi,\ \eta,\ t)$, т. е. задан закон изменения скорости каждой частицы, то закон движения частиц получается с помощью непосредственного интегрирования:

$$x=\xi+\int_{t_0}^{t} v_x(\xi,\ \eta,\ \tau)\,d\tau,\quad y=\eta+\int_{t_0}^{t} v_y(\xi,\ \eta,\ \tau)\,d\tau,$$

короче, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,\ t)\,dt.$

Лагранжевы координаты как бы вносят в толпу частиц определенное спокойствие. Даже если известно, что частицы в процессе движения не налезают одна на другую, т. е. среда не образует «складок» (это условие в одномерном случае обеспечивает сохранение порядка следования частиц), при движении на плоскости или в пространстве первоначальный порядок может оказаться полностью перепутанным, частицы могут обходить одна другую, образуя сложные структуры. На рис. 3 показана возможная картина искажения в некоторый момент t первоначально прямоугольной решетки частиц: меняются и относительные расстояния и углы. Но лагранжевы координаты частиц в процессе движения остаются неизменными, т. е., когда мы называем эти координаты, мы как бы вспоминаем первоначальное расположение частиц. Это бывает особенно полезно, когда область, занятая частицами, в процессе эволюции меняется, как облако, по заранее неизвестному закону: в координатах Лагранжа область остается неизменной.

Аналогично (3.5) выводится формула связи производных по времени в координатах Эйлера и Лагранжа:

$$\frac{d\vartheta}{dt}=v_x\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+v_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}. \tag{2}$$

Пространственные члены в правой части можно объединить, записав их сумму в форме, инвариантной относительно выбора системы координат. Для этого напомним (см., например, ЭПМ, § XI. 6) о векторно-дифференциальном операторе *набла*, который в декартовых координатах на плоскости имеет выражение

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

(при рассмотрении пространственных полей в правой части добавляется член $\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$). Если вспомнить формулу (1) для вектора скорости

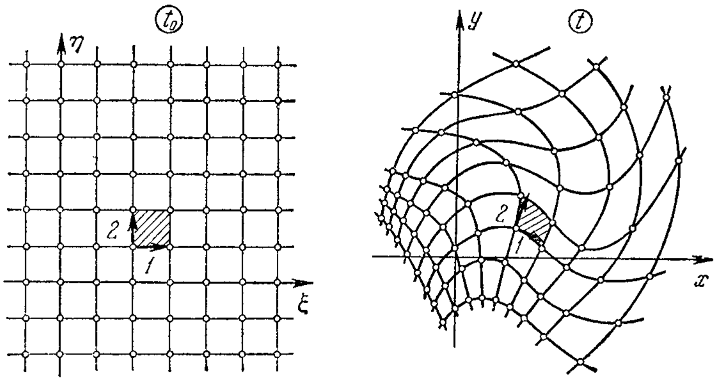

Рис. 3.

и общую формулу $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y$ для скалярного произведения двух векторов, то сумму первых двух членов в правой части (2) можно переписать в виде

$$\left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y}\right)\vartheta = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\vartheta;$$

здесь $\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ — скалярный дифференциальный оператор, который может действовать на любое скалярное (как в данном случае) или векторное поле, указанное за этим оператором. Итак, формула (2) приобретает вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\vartheta + \frac{\partial\vartheta}{\partial t}. \qquad (3)$$

В точности тот же вид она имеет для пространственного поля. Смысл обоих слагаемых в правой части (3) тот же, что в формуле (3.5).

В процессе эволюции среды каждый ее участок, занятый определенной порцией частиц, меняет, вообще говоря, как форму, так и площадь. Для дальнейшего нам потребуется формула для коэффициента искажения площадей малых фигур; а так как каждую фигуру можно с любой степенью точности разбить на прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат, то вычислим коэффициент искажения площадей таких прямоугольников.

Сначала выведем простую формулу для площади S параллелограмма, построенного на векторах

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}.$$

Для этого вспомним, что векторное произведение любых двух векторов по модулю как раз равно площади параллелограмма, построенного на этих векторах (см., например, ЭПМ, § IX.1). Но по общей формуле для векторного произведения двух векторов

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

получаем для случая векторов на плоскости x, y

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & 0\\ b_x & b_y & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Таким образом,

$$S=\left|\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right|, \tag{5}$$

где большие черточки означают определитель, а маленькие — абсолютную величину. Знак полученного определителя Δ также имеет непосредственный геометрический смысл: если $\Delta>0$, то из (4) видно, что кратчайший поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ совершается в ту же сторону, что от $\boldsymbol{i}$ к $\boldsymbol{j}$; если $\Delta<0$, то эти направления поворота противоположны.

Теперь мы можем получить формулу для коэффициента искажения площадей. Для этого рассмотрим бесконечно малый прямоугольник в среде при $t=t_0$, т. е. в плоскости ξ, η (рис. 3); пусть он расположен в точке (ξ, η) и имеет стороны $d\xi\,\boldsymbol{i}$ и $d\eta\,\boldsymbol{j}$. В процессе эволюции среды в момент t он перейдет в бесконечно малый параллелограмм, расположенный в точке (x, y) и имеющий стороны

$$\partial_\xi(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})=(x'_\xi\boldsymbol{i}+y'_\xi\boldsymbol{j})\,d\xi \quad \text{и} \quad \partial_\eta(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})=(x'_\eta\boldsymbol{i}+y'_\eta\boldsymbol{j})\,d\eta$$

(∂_ξ означает частный дифференциал по ξ, взятый при фиксированном значении η; аналогично расшифровывается ∂_η). В силу формулы (5) площадь этого параллелограмма равна

$$\left|\begin{vmatrix} x'_\xi\, d\xi & y'_\xi\, d\xi \\ x'_\eta\, d\eta & y'_\eta\, d\eta \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix}\right| d\xi\, d\eta.$$

Так как площадь исходного прямоугольника равнялась $d\xi\, d\eta$, то мы получаем, что его площадь увеличилась в

$$\left|\begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix}\right| \tag{6}$$

раз. Как мы уже упоминали, во столько же раз (с точностью до малых высшего порядка) увеличится площадь любой малой фигуры, независимо от ее формы. Определитель, стоящий в (6) под знаком абсолютной величины, имеет специальное название *якобиáн* по имени немецкого математика К. Якоби и обозначение $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$, в котором числитель и знаменатель можно, с точностью до знака, истолковать как площади бесконечно малой фигуры после и до деформации. Знак якобиана тоже имеет наглядный смысл: якобиан положителен, если после деформации направление обхода малого замкнутого контура сохраняется (т. е., если оно было положительным, то и останется положительным), и отрицателен в противном случае, т. е. когда рассматриваемый малый участок плоскости как бы «выворачивается наизнанку», как это бывает при зеркальном отражении. Якобиан, вообще говоря, не постоянен, а принимает в различных точках плоскости различные значения, т. е. и коэффициент искажения площадей в различных точках различен.

Нетрудно усмотреть непосредственную аналогию между указанным здесь смыслом абсолютной величины и знака якобиана и описанным в § 3 смыслом абсолютной величины и знака производной $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ для эволюции одномерной среды.

Позже мы будем рассматривать семейства отображений плоскости ξ, η в плоскость x, y, непрерывно зависящих от параметра t. Из сказанного выше следует, что если при некотором значении t якобиан отображения всюду положителен, то при изменении t он будет оставаться положительным до тех пор, пока у этого отображения не возникнет складка. Тогда на той части плоскости ξ, η, которая при отображении окажется «вывернутой наизнанку», якобиан станет отрицательным, а на линии, вдоль которой осуществляется складка, якобиан будет равен нулю. Подробнее об образовании складок будет сказано в §§ II.10 и III.6.

Полученный результат применяется, в частности, для выражения различных параметров среды в лагранжевых координатах. Пусть, например, известна исходная плотность среды $\rho_0(\xi, \eta) = \rho(\xi, \eta, t_0)$ (в расчете на единицу площади) и дано, что масса каждого элемента среды в процессе его эволюции не меняется. Тогда плотность меняется обратно пропорционально площади, т. е.

$$dm = \rho_0 \,|\, D(\xi,\ \eta) \,| = \rho \,|\, D(x,\ y) \,|,$$

откуда

$$\rho(x,\ y,\ t) = \rho_0(\xi,\ \eta) \left| \frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)} \right| = \rho_0(\xi,\ \eta) \left| \frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)} \right|^{-1}. \tag{7}$$

В частности, если среда в процессе эволюции образует складку, то, как было сказано, вдоль линии складки будет $\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)} = 0$; значит, вдоль этой линии будет $\rho = \infty$.

Если мысленно выделенная в момент t_0 область (K_0) в процессе эволюции преобразовалась в момент t в область (K) без перекрытий, то массу среды в этой области можно выразить как в эйлеровых координатах, так и в лагранжевых:

$$m = \int\limits_{(K)} \rho(x,\ y,\ t)\, dK = \int\limits_{(K_0)} \rho_0(\xi,\ \eta)\, dK_0, \tag{8}$$

где $dK = dx\, dy = |D(x,\ y)|$, $dK_0 = d\xi\, d\eta = |D(\xi,\ \eta)|$. Формальный переход от одного интеграла (8) к другому легко осуществляется с помощью формулы (7).

Упражнения

1. Пусть $\boldsymbol{v}(x,\ y) = \boldsymbol{i}$; найдите $x(t;\ \xi,\ \eta)$, $y(t;\ \xi,\ \eta)$.

2. Пусть $\boldsymbol{v}(x,\ y) = \alpha \boldsymbol{r}$; найдите $x(t;\ \xi,\ \eta)$, $y(t;\ \xi,\ \eta)$.

3. Пусть $\boldsymbol{v}(x,\ y) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, $t_0 = 0$. Выразите $\boldsymbol{v}$ в лагранжевых координатах; найдите $\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)}$ и истолкуйте результат.

4. Пусть $\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\sin t \cdot (\xi\boldsymbol{i} + \eta\boldsymbol{j})$, $t_0 = 0$. Найдите выражение $\boldsymbol{v}$ в эйлеровых координатах и траектории частиц.

5. Пусть плоскость x, y отображается в себя так, что каждая точка $(x;\ y)$ переходит в точку с координатами $x' = 2x$, $y' = 2y$. Найдите $\frac{D(x',\ y')}{D(x,\ y)}$ и истолкуйте результат.

6. То же — для отображения $x' = |x|$, $y' = |y|$.

7. Выведите формулы и вычислите якобиан *преобразования обратными радиусами* (оно же называется *зеркальным отражением плоскости относительно окружности* (C) радиуса R с центром в точке O), при котором каждая точка M плоскости переходит в точку M', лежащую на луче OM, причем $OM \cdot OM' = R^2$. Как согласовать отрицательность якобиана с тем, что каждая точка (C) переходит в себя и потому направление обхода (C) при отображении сохраняется?

8. Выведите формулу для коэффициента искажения объемов при эволюции трехмерной (пространственной) среды. Каков смысл знака получающегося якобиана?

Указание. Воспользуйтесь формулой для векторно-скалярного (смешанного) произведения трех векторов, заданных своими разложениями в декартовых проекциях, и геометрическим смыслом этого произведения.