§ 5. Движение сосредоточенной порции частиц

Вернемся к одномерному случаю. Описание эволюции среды, введенное в § 2, пригодно и при рассмотрении движения сгустка частиц — порции конечной массы, сосредоточенной на участке бесконечно малой длины; сюда же, с помощью введения соответствующего коэффициента пропорциональности, можно включить и описание поведения отдельной частицы.

Напомним свойства *дельта-функции* Дирака $\delta(x)$ (подробней см., например, в ЭПМ, § VI.1).

Основным определяющим свойством является соотношение $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx = f(0)$, справедливое для любой непрерывной при $x=0$ функции $f(x)$. Из него вытекает, что функцию $\delta(x)$ нельзя задать простым указанием ее значений, как обычную функцию, поэтому $\delta(x)$ называют обобщенной функцией. При действиях с ней можно считать, что она отлична от нуля лишь в бесконечной близости точки $x=0$, причем

$$\delta(x) \geqslant 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = \int\limits_{-0}^{+0}\delta(x)\,dx = 1.$$

Перечисленные свойства дают возможность рассматривать функцию $\rho=m_0\delta(x-a)$ как поле плотностей, отвечающее массе m_0, сосредоточенной в точке $x=a$. Дельта-функцию $\delta(x)$ можно получить в пределе из различных обычных функций, например, из функции $\frac{k}{\pi(1+k^2x^2)}$ при $k\to\infty$.

Таким образом, если масса m_0 была в момент t_0 сосредоточена в точке ξ_0, а затем перемещалась как целое (не расплываясь!) по закону $x=\varphi(\xi_0, t)$ (см. п. 3), то закон изменения поля плотностей имеет вид

$$\rho=m_0\delta(x-\varphi(\xi_0, t)). \qquad (1)$$

В лагранжевых координатах, в силу общей формулы (3.7), этот закон имеет выражение

$$\rho = m_0\,\delta(\xi-\xi_0)\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|^{-1} = m_0\,|\varphi'_\xi(\xi_0, t)|^{-1}\,\delta(\xi-\xi_0). \qquad (2)$$

Этот результат очевиден: за время от t_0 до t бесконечно малый участок, на котором сосредоточена масса m_0, растянется в $\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|$ раз, и, чтобы масса осталась равной m_0, к исходной плотности надо дописать обратный множитель.

Отметим одну принципиальную трудность, возникающую при переходе к лагранжевым координатам: производная $\left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi_0}$ имеет смысл, если закон движения $x(t;\ \xi)$ известен не только при $\xi=\xi_0$, но и при ξ, близких к ξ_0. Эта трудность не возникает, если сгусток частиц накладывается на распределенную среду из частиц. Но если рассматривается только сгусток — в частности, если рассматривается поведение изолированной частицы,— то пользоваться координатами Лагранжа нецелесообразно.

Покажем формальный, основывающийся на свойствах δ-функции вывод (2) из (1), предполагая для простоты, что в процессе эволюции частицы не перелезают одна через другую, откуда вытекает, что функция $x=\varphi(\xi;\ t)$ при фиксированном t — возрастающая (почему?). Для этого заметим, что если $f(x)$ — какая угодно возрастающая функция, равная нулю при $x=a$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x))\,dx = \int_{f(-\infty)}^{f(\infty)} \delta(s)\,\frac{ds}{f'(x)} = \frac{1}{f'(a)}$$

(в первом переходе мы совершили подстановку $f(x)=s$, откуда $f'(x)dx=ds$, $dx=ds/f'(x)$, а во втором воспользовались основным определяющим свойством дельта-функции). Поэтому имеет место общая формула

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{f'(a)}\,\delta(x-a). \tag{3}$$

Отсюда, переходя в правой части (1) к лагранжевым координатам, получим

$$\rho=m_0\delta(x(t;\ \xi)-x(t;\ \xi_0))=m_0[x'_\xi(t;\ \xi_0)]^{-1}\delta(\xi-\xi_0),$$

т. е. формулу (2).

Упражнение

Напишите выражения в координатах Эйлера и Лагранжа для поля плотностей при эволюции сосредоточенной порции частиц в случае плоской среды.

§ 6. Поток величины

Понятие потока — это одно из важных понятий физики сплошной среды. Понятие потока можно ввести для любого интегрального параметра среды — такого, как масса, заряд, энергия и т. д.

Начнем с одномерного случая и будем для определенности говорить о массе m. Мы уже упоминали в § 2, что плотность среды

$$\rho=\rho(x,\ t)=\frac{dm}{dx}$$

является локальным параметром среды. Величина

$$q=q(x,\ t)=\rho v=\frac{dm}{dx}\,v$$