смысл, если закон движения $x(t;\ \xi)$ известен не только при $\xi=\xi_0$, но и при ξ, близких к ξ_0. Эта трудность не возникает, если сгусток частиц накладывается на распределенную среду из частиц. Но если рассматривается только сгусток — в частности, если рассматривается поведение изолированной частицы,— то пользоваться координатами Лагранжа нецелесообразно.

Покажем формальный, основывающийся на свойствах δ-функции вывод (2) из (1), предполагая для простоты, что в процессе эволюции частицы не перелезают одна через другую, откуда вытекает, что функция $x=\varphi(\xi;\ t)$ при фиксированном t — возрастающая (почему?). Для этого заметим, что если $f(x)$ — какая угодно возрастающая функция, равная нулю при $x=a$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x))\,dx = \int_{f(-\infty)}^{f(\infty)} \delta(s)\,\frac{ds}{f'(x)} = \frac{1}{f'(a)}$$

(в первом переходе мы совершили подстановку $f(x)=s$, откуда $f'(x)dx=ds$, $dx=ds/f'(x)$, а во втором воспользовались основным определяющим свойством дельта-функции). Поэтому имеет место общая формула

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{f'(a)}\,\delta(x-a). \tag{3}$$

Отсюда, переходя в правой части (1) к лагранжевым координатам, получим

$$\rho = m_0\delta(x(t;\ \xi)-x(t;\ \xi_0)) = m_0[x'_\xi(t;\ \xi_0)]^{-1}\delta(\xi-\xi_0),$$

т. е. формулу (2).

Упражнение

Напишите выражения в координатах Эйлера и Лагранжа для поля плотностей при эволюции сосредоточенной порции частиц в случае плоской среды.

§ 6. Поток величины

Понятие потока — это одно из важных понятий физики сплошной среды. Понятие потока можно ввести для любого интегрального параметра среды — такого, как масса, заряд, энергия и т. д.

Начнем с одномерного случая и будем для определенности говорить о массе m. Мы уже упоминали в § 2, что плотность среды

$$\rho = \rho(x,\ t) = \frac{dm}{dx}$$

является локальным параметром среды. Величина

$$q = q(x,\ t) = \rho v = \frac{dm}{dx}\,v$$

(v — скорость среды), которая также является локальным параметром среды, называется, по определению, *потоком* массы (говорят также — массовой скоростью).

В каждой точке оси x в каждый момент времени знак потока совпадает со знаком скорости, т. е. поток положителен, если среда движется в положительном направлении, и отрицателен в противном случае. Поток пропорционален как плотности, так и скорости, т. е. увеличить поток можно как за счет увеличения плотности, так и за счет увеличения скорости частиц.

Нетрудно установить физический смысл потока. Через точку x за время dt проходит участок среды длины $dx=v\,dt$; масса этого участка равна

$$\rho\, dx=\rho v dt=q dt.$$

Таким образом, поток массы есть масса среды, проходящая через данную точку оси за единицу времени. Этому отвечает и размерность потока:

$$[q]=[\rho v]=\frac{[m]}{[x]}\cdot\frac{[x]}{[t]}=\frac{[m]}{[t]}.$$

Аналогично вводится и аналогичный смысл имеет поток любого другого интегрального параметра s среды. Соответствующая плотность есть

$$\rho_s=\rho_s(x,\ t)=\frac{ds}{dx},\quad \text{т. е.}\quad s=\int\rho_s\,dx, \tag{1}$$

а поток —

$$q_s=q_s(x,\ t)=\rho_s v=\frac{ds}{dx}v.$$

При этом размерности

$$[\rho_s]=\frac{[s]}{[x]},\quad [q_s]=\frac{[s]}{[t]}.$$

При рассмотрении движения среды на плоскости или в пространстве обнаруживается векторный характер потока. Пусть рассматривается какой-либо скалярный интегральный параметр среды в пространстве — например, масса m. Потоком массы называется вектор (точнее, векторное поле)

$$\boldsymbol{q}_m=\boldsymbol{q}_m(P,\ t)=\rho\boldsymbol{v}=\frac{dm}{d\Omega}\boldsymbol{v}$$

(Ω — объем). В каждой точке P пространства он направлен туда же, куда и скорость частиц.

Размерность потока массы в пространстве

$$[\boldsymbol{q}_m]=\frac{[m]}{[\Omega]}[\boldsymbol{v}]=\frac{[m]}{[l^3]}\frac{[l]}{[t]}=\frac{[m]}{[l]^2[t]}.$$

В частности, такую размерность имеет поток массы в случае *одномерного движения в пространстве*, т. е. когда скорость частиц параллельна некоторой оси, а локальные характеристики среды зависят только от координаты, отсчитываемой вдоль этой оси, например, $\boldsymbol{v}=v(x,\ t)\,\boldsymbol{i}$, $\rho=\rho(x,\ t)$. Как видим, эта размерность отличается от размерности потока массы при движении на прямой. Обратите внимание, что ρ здесь измеряется в $г \cdot см^{-3}$, а не в $г \cdot см^{-1}$, как в § 2.

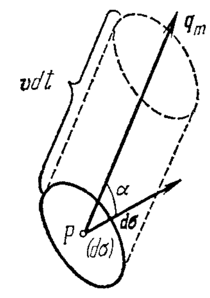

Рис. 4.

Чтобы установить физический смысл потока массы в пространстве, выберем мысленно в пространстве ориентированную (т. е. с указанными внешней и внутренней сторонами) элементарную площадку $(d\sigma)$ (рис. 4). Как известно, такую площадку принято изображать вектором $\boldsymbol{d\sigma}$, направленным перпендикулярно $(d\sigma)$ от внутренней стороны к наружной и по модулю равным площади $(d\sigma)$ (см., например, ЭПМ, § X.4). За время dt через эту площадку пройдет порция среды, заполняющая косой цилиндрик, показанный на рис. 4 пунктиром; масса этой порции равна

$$d^2m=\rho\,(v\,dt\cos\alpha)\,d\sigma=|\boldsymbol{q}_m|\,d\sigma\cos(\widehat{\boldsymbol{q}_m,\ \boldsymbol{d\sigma}})\,dt=\boldsymbol{q}_m\cdot\boldsymbol{d\sigma}\,dt$$

(знак d^2 здесь подчеркивает, что как $d\sigma$, так и dt бесконечно малы, т. е. получается как бы смешанный дифференциал). Отсюда

$$\boldsymbol{q}_m\cdot\boldsymbol{d\sigma}=\frac{d^2m}{dt}, \tag{2}$$

т. е. скалярное произведение потока массы на вектор элементарной площадки равно массе среды, проносимой через эту площадку изнутри наружу за единицу времени. Если в одной и той же точке P выбирать направление площадки $(d\sigma)$ по-разному, то в силу формулы (2) наибольшее значение $\frac{d^2m}{dt}$ получится, когда $(d\sigma)$ направлена перпендикулярно $\boldsymbol{q}_m$, причем это значение равно $q_m d\sigma$. Итак, вектор $\boldsymbol{q}_m$ указывает направление распространения массы, и по модулю он равен скорости этого распространения, в расчете на единицу площади.

Суммируя элементы (2) (они, вообще говоря, имеют различный знак и могут равняться нулю, если $\boldsymbol{q}_m \parallel (d\sigma)$), получаем поток массы *) через конечную ориентированную поверхность (σ).

---

*) Согласно терминологии векторного анализа (ЭПМ, § X.4), надо было бы говорить «поток потока массы», так как слово «поток» имеет два р а з н ы х смысла: один — введенный выше и другой — поток любого вектора $\boldsymbol{a}$ через любую ориентированную поверхность (σ), равный $\int\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d\sigma}$ Но мы все же будем говорить «поток массы», хотя при этом надо тщательно следить, какой именно поток имеется в виду (особенно позже, когда мы будем говорить о переносе векторных интегральных характеристик).

В частности, если поверхность (σ) — замкнутая, то соответствующий поток массы

$$\oint_{(\sigma)} \boldsymbol{q}_m \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{(\sigma)} \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{dm}{dt}$$

равен массе среды, проносимой через всю поверхность (σ) изнутри наружу за единицу времени.

В разобранном примере поток $\boldsymbol{q}_m$ как бы несли на себе частицы, движущиеся со скоростью среды. Но о потоке $\boldsymbol{q}_s$ какой-либо интегральной характеристики s среды можно говорить и в более общем случае — всегда, когда имеет место формула

$$\boldsymbol{q}_s \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{d^2 s}{dt}, \qquad (3)$$

аналогичная (2), где в числителе правой части стоит количество величины s, проносимой через $(d\sigma)$ изнутри наружу за время dt. При этом перенос s не обязан быть связанным с «регулярным» движением частиц и даже вообще с частицами. Приведем несколько примеров.

Допустим, что движется смесь нескольких сортов частиц, причем каждый сорт со своей скоростью. Обозначим плотность l-й компоненты (l-го сорта) среды через ρ_l, а скорость этой компоненты — через $\boldsymbol{v}_l$. В этом случае соотношение (2) будет, очевидно, выполнено, если положить

$$\boldsymbol{q}_m = \sum_l \rho_l \boldsymbol{v}_l.$$

Получающаяся картина с точки зрения баланса масс эквивалентна движению фиктивной среды плотности $\rho = \sum_l \rho_l$ с единой средней скоростью $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \sum_l \rho_l \boldsymbol{v}_l$. При этом можно написать старую формулу $\boldsymbol{q}_m = \rho \boldsymbol{v}$, однако теперь уже $\boldsymbol{v}$ не будет скоростью каких-то частиц.

Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении движения заряженных частиц, если в качестве интегральной характеристики выбрать заряд e. При этом из общего определения (3) видно, что потоком заряда служит плотность тока $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{q}_e$. Если движутся частицы только одного сорта с плотностью зарядов в среде $\sigma = \frac{dn}{d\Omega} e_0$ (здесь $\frac{dn}{d\Omega}$ — количество частиц на единицу объема, e_0 — заряд одной частицы) и скоростью $\boldsymbol{v}$, то $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{v}$. Если же движутся частицы разных сортов, то, как в предыдущем абзаце, $\boldsymbol{j} = \sum \sigma_l \boldsymbol{v}_l$. Новым здесь является то, что плотности σ_l могут быть разного знака. В частности, возможен случай, когда $\sum_l \sigma_l \equiv 0$, но $\sum_l \sigma_l \boldsymbol{v}_l \neq 0$. В этом случае суммарный заряд в любом объеме равен нулю, но суммарный ток отличен от нуля, так что заменить, как в предыдущем абзаце, всю картину на движение некоторой фиктивной среды с единой скоростью уже невозможно.

Так, например, металлический проводник можно представить себе как жесткий каркас из положительных ионов (неподвижных в системе координат, жестко связанной с этим проводником), заполненный облаком из легко движущихся электронов. При этом заряды ионов и электронов по абсолютной величине равны и в каждом конечном объеме количество ионов равно количеству электронов. Считая ионы 1-й средой, а электроны —2-й, получаем, что $\sigma_1=-\sigma_2$, т. е. $\sigma_1+\sigma_2=0$, суммарный заряд в любом конечном объеме равен нулю. Если проводник неподвижен в пространстве, то $\boldsymbol{v}_1=0$, и потому плотность тока $\boldsymbol{j}=\sigma_2\boldsymbol{v}_2$. Если проводник движется со скоростью $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}$, то $\boldsymbol{j}=\sigma_2(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v})$; в частности, при $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2$ будет $\boldsymbol{j}=0$, т. е. тока нет (электроны неподвижны относительно каркаса ионов).

В качестве следующего примера рассмотрим диффузию частиц в некоторой среде, причем за интегральный параметр выберем массу m диффундирующего вещества. Здесь движение диффундирующих частиц является случайным, броуновским, так что для него нельзя указать определенное поле скоростей; однако в § V.3 будет показано, что формула (3) при $s=m$ имеет место, если положить $\boldsymbol{q}_m=-\varkappa\,\mathrm{grad}\,\tilde{\rho}$, где $\varkappa$ — так называемый *коэффициент диффузии*, а $\tilde{\rho}=\frac{dm}{d\Omega}$ — плотность диффундирующего вещества. Таким образом, в этом примере поток массы не связан с определенным, как раньше, полем скоростей частиц.

Аналогичный вид имеет вектор потока $\boldsymbol{q}_Q=-b\,\mathrm{grad}\,\vartheta$ тепловой энергии Q в процессе теплопроводности, где температура ϑ в простейшем случае пропорциональна плотности тепловой энергии; здесь b — *коэффициент теплопроводности*. Здесь процесс не всегда связан непосредственно с перемещением частиц. Например, в кристалле атомы колеблются вокруг фиксированных положений равновесия, причем чем выше температура, тем больше амплитуда колебаний. Интенсивные колебания в одной части вызывают за счет сил взаимодействия между соседними молекулами колебания в другой части.

Поток не обязательно связан с материальными частицами. Очень важным примером является поток энергии. Впервые это понятие ввел Н. А. Умов применительно к гидродинамике *).

*) В биографии Н. А. Умова приводится любопытная деталь: защита диссертации, в которой было введено это понятие, продолжалось более восьми часов и была весьма тяжелой. Отметим, что в биологии известен закон, согласно которому онтогенез повторяет филогенез, т. е. развитие отдельного организма повторяет развитие биологического вида. Поэтому можно предполагать, что студент нашей эпохи на какой-то стадии развития подобен крупным физикам XIX века и также нуждается в длительном и подробном разъяснении понятия потока энергии.

Поток энергии E (или вектор Умова) равен

$$\boldsymbol{q}_E = \boldsymbol{v}\left(p + \rho E_{\text{вн}} + \rho\frac{v^2}{2}\right),$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность, $E_{\text{вн}}$ — внутренняя энергия вещества, отнесенная к единице массы.

Таким образом, в случае идеальной жидкости или газа вектор $\boldsymbol{q}_E$ направлен туда же, куда направлена скорость $\boldsymbol{v}$, отличие $\boldsymbol{q}_E$ от $\boldsymbol{v}$ выражается скалярным множителем, стоящим в скобках. Связь потока энергии и потока числа частиц в этом случае такова, что энергия и число частиц, проходящих за единицу времени через малую площадку $(d\sigma)$, при различных ориентациях площадки меняются в одинаковом отношении, пропорционально. В частности, как масса, так и энергия не проходят через $(d\sigma)$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{v}=0$ или $\boldsymbol{v}\perp \boldsymbol{d\sigma}$, т. е. $\boldsymbol{v}$ лежит в плоскости площадки $(d\sigma)$, вещество скользит по площадке, не пересекая ее.

Однако эта пропорциональность нарушается при рассмотрении потока через конечную поверхность и, в частности, через замкнутую поверхность. Возможен случай, когда

$$\frac{dM}{dt} = -\int_{(\sigma)} \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{d\sigma} = 0,$$

$$\frac{dN}{dt} = -\int_{(\sigma)} n\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{d\sigma} = 0,$$

тогда как

$$\frac{dE}{dt} = -\int_{(\sigma)} \boldsymbol{q}_E\cdot\boldsymbol{d\sigma} \neq 0.$$

Здесь M, N, E — полная масса, число частиц, энергия в объеме (Ω), а интегралы берутся по поверхности (σ), ограничивающей этот объем. В самом деле, представим себе, что первые два интеграла равны нулю, потому что часть (σ_1) поверхности (σ) дает положительный вклад, а часть (σ_2) — отрицательный и они компенсируют друг друга. Тогда и в третьем интеграле (σ_1) дает положительный вклад, а (σ_2) — отрицательный; но они имеют другие множители, другой вес, и поэтому компенсации может не быть.

Таким образом, даже в идеальной жидкости поток энергии существенно отличается от потока числа частиц, хотя и совпадает с ним по направлению.

Отметим еще, что в теории теплопроводности поток энергии $\boldsymbol{q}=-b\operatorname{grad}\vartheta$ не связан с потоком массы или частиц. Между тем в газе энергия есть только энергия частиц. Казалось бы, что и здесь поток числа частиц и поток энергии должны быть пропорциональны. Причина этого расхождения заключается в следующем: представим себе поток, быстро изменяющийся во времени, так что меняется и знак! Тогда средний по времени поток частиц может обратиться в нуль при отличном от нуля среднем потоке энергии — так же, как выше, при усреднении по поверхности.

Поток энергии электромагнитного поля, состояние которого в каждой точке пространства (для случая вакуума) в каждый момент времени характеризуется двумя векторами — электрическим $\boldsymbol{E}$ и магнитным $\boldsymbol{H}$, был найден Пойнтингом:

$$\boldsymbol{q}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

(c—скорость света). Он связан с локальным скалярным параметром электромагнитного поля — плотностью $\rho_{\mathscr{E}}$ энергии $\mathscr{E}$

$$\rho_{\mathscr{E}}=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)$$

формулами

$$\mathscr{E}=\int\limits_{(\Omega)}\rho_{\mathscr{E}}\,d\Omega,\qquad \frac{d\mathscr{E}}{dt}=-\int\limits_{(\sigma)}\boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Вектор $\boldsymbol{q}$ в случае электромагнитного поля уже совсем не связан с потоком частиц *).

Итак, можно рассматривать три типа величин, связанных с интегральными параметрами среды: сам этот параметр, его плотность и поток.

Мы уже упоминали о том, что в качестве интегральных параметров среды можно брать и векторные величины; типичным примером является количество движения

$$\boldsymbol{D}_{(\Omega)}=\int\limits_{(\Omega)}\rho\boldsymbol{v}\,d\Omega$$

материальной среды. Для такой интегральной характеристики $\boldsymbol{s}$ формула (3) может также иметь место, но здесь поток q_s будет уже не вектором, а *тензором 2-го ранга*. Напомним (см., например, ЭПМ, § IX.5), что тензор 2-го ранга есть объект, характеризуемый своими компонентами, которые преобразуются по определенным правилам при повороте осей декартовых координат. Его можно представить в виде суммы *диад*, т. е. выражений вида $\boldsymbol{ab}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$—обычные векторы. Такое *тензорное произведение* не сводится к какому-либо более простому объекту — в отличие, например, от скалярного произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, которое сводится к скаляру. В тензорном произведении можно раскрывать скобки по обычным правилам, но не переставлять сомножители. В частности, можно в каждой диаде разложить все векторы по ортам декартовых осей $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и, совершив пе-

*) В общем случае полный поток всех видов энергии называют вектором Умова — Пойнтинга. Иногда различают вектор Умова в механике и вектор Пойнтинга в теории поля.

ремножение и приведение подобных членов, преобразовать любой тензор 2-го ранга к виду $\sum\limits_{i,\,j=1}^{3}\alpha_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$. Таким образом, как уже было сказано, каждый такой тензор полностью определяется набором *девяти* величин α_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$, впрочем, зависящих от выбора координатных осей. Для нас важно также, что диаду можно скалярно множить на вектор по следующему правилу:

$$(\boldsymbol{ab})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}, \tag{4}$$

т. е. в результате получается вектор.

Вооружась этими сведениями, заметим, что в ситуации, показанной на рис. 4, через площадку $(d\sigma)$ за время dt пройдет порция среды, обладающая количеством движения

$$d^2\boldsymbol{D}=(d^2m)\,\boldsymbol{v}=\rho\,(v\,dt\cos\alpha)\,d\sigma\boldsymbol{v}=\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{d\sigma})\,\boldsymbol{v}\,dt.$$

Пользуясь формулой (4), перепишем это равенство в виде

$$\frac{d^2\boldsymbol{D}}{dt}=(\rho\boldsymbol{vv})\cdot\boldsymbol{d\sigma}. \tag{5}$$

Это как раз равенство вида (3). Таким образом, тензор потока количества движения выражается по формуле

$$\boldsymbol{q}_D=\rho\boldsymbol{vv}. \tag{6}$$

Если в пространстве выбраны оси координат с ортами $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$, то обе части формулы (5) можно представить в виде разложений $\boldsymbol{D}=\sum\limits_i D_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{v}=\sum\limits_i v_i\boldsymbol{e}_i$. Это даст

$$\sum_i\frac{d^2D_i}{dt}\,\boldsymbol{e}_i=\rho\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{d\sigma})\,\boldsymbol{v}=\rho\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{d\sigma})\sum_i v_i\boldsymbol{e}_i$$

или в проекциях

$$\frac{d^2D_i}{dt}=\rho\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{d\sigma})\,v_i=\rho v_i\sum_j v_j\,(d\sigma)_j \qquad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{7}$$

В частности, если площадка $(d\sigma)$ выбрана так, что орт $\boldsymbol{e}_j$ направлен к ней по внешней нормали, то правая часть (7) равна $\rho v_i v_j d\sigma$. Таким образом, мы получаем смысл компонентов тензора (6)

$$\rho\boldsymbol{vv}=\sum_{i,\,j}\rho v_i v_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j:$$

$\rho v_i v_j$ равно i-й проекции количества движения среды, проносимой за единицу времени в положительном направлении j-й оси через единичную элементарную площадку, расположенную перпендикулярно этой оси.

Подчеркнем еще раз, что здесь рассматривалось упорядоченное движение частиц, т. е. такое, при котором скорость частиц в каждый момент времени однозначно определяется их положением (координатами). Не следует думать, что для неупорядоченного движения частиц, т. е. для среды с *рассеянной скоростью* поток количества движения получится с помощью простой замены скорости на ее среднее значение. Это ясно уже из рассмотрения одномерного движения частиц в противоположных направлениях с равной плотностью $\rho/2$, со скоростью $\pm v(x, t)$: при этом в каждой точке средняя скорость равна нулю, тогда как поток количества движения равен ρv^2.

В самом деле, частицы, проходящие через произвольную точку $x=x_0$ слева направо за время dt, приносят в область $x>x_0$ положительную порцию количества движения, равную $dm\cdot v=\frac{1}{2}\rho v^2 dt$. За это же время частицы, проходящие через точку $x=x_0$ справа налево, уносят из указанной области отрицательную порцию количества движения, равную $dm\cdot(-v)=-\frac{1}{2}\rho v^2 dt$, в результате чего количество движения в этой области возрастет (отрицательную величину нужно вычесть). Итак, обе группы частиц дают положительный вклад в $\frac{dD}{dt}$, т. е. в рассматриваемом случае

$$q_D=\frac{dD}{dt}=\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{1}{2}\rho v^2=\rho v^2.$$

Выведем выражение для потока количества движения при одномерной эволюции среды из частиц с рассеянной скоростью в общем случае. Для этого обозначим через $F(v, x, t)\,dv$ относительную долю числа частиц, имеющих в момент t координату x, скорость которых заключена между v и $v+dv$; другими словами, F есть функция распределения вероятностей скорости частицы (конечно, зависящая от координаты и момента времени как от параметров). За время dt через точку x перейдет порция этих частиц, расположенная на участке длины $v\,dt$; эта порция будет нести количество движения $\rho v\,dt\cdot v\cdot F\,dv$, где, вообще говоря, $\rho=\rho\,(x, t, v)$. Суммируя эти порции, получаем

$$dD=\int\limits_{v=-\infty}^{\infty}\rho v^2\,dt\,F\,dv,$$

откуда поток количества движения равен

$$q_D=\frac{dD}{dt}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho v^2 F\,dv.$$

Но это есть среднее (по скоростям, при зафиксированных t, x) значение величины ρv^2, т.е. $q_D=\overline{\rho v^2}$.

При этом важно отметить, что в правой части, вообще говоря, нельзя перейти к $\bar{\rho}(\bar{v})^2$,так как среднее значение произведения (в частности, квадрата) не обязано равняться произведению средних значений! Так, в примере, с которого мы начали, будет $\bar{v}=0$, $\overline{v^2}=v^2\neq(\bar{v})^2$

Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении пространственного движения частиц. Поток i-й проекции количества движения среды в направлении j-й оси (i, $j=1$, 2, 3) равен $(q_D)_{ij}=\overline{\rho v_i v_j}$, где осреднение производится по скоростям частиц в данной точке в данный момент времени; можно написать также $q_D=\overline{\rho \boldsymbol{vv}}$. И здесь перейти к произведению средних скоростей, вообще говоря, невозможно.

Рассмотрим сначала идеальный газ, который покоится при отличной от нуля температуре. Это означает, что частицы (атомы или молекулы) обладают хаотическим распределением скоростей, для которого регулярная составляющая отсутствует, т. е. для каждой малой порции газа $\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{1}{n}\sum\limits_k \boldsymbol{v}^{(k)}=0$, а потому и $\bar{v}_i=0$ для любого направления ($i=1$, 2, 3); здесь индекс k нумерует частицы в порции, а n означает общее число частиц в ней. Однако средние квадраты $\overline{v^2}=\frac{1}{n}\sum\limits_k|\boldsymbol{v}^{(k)}|^2$ и $\overline{v_i^2}=\frac{1}{n}\sum\limits_k(v_i^{(k)})^2$ положительны, так как все слагаемые в этих суммах имеют одинаковый знак. Итак, *в рассматриваемом случае потока массы нет, но поток количества движения имеется.*

Пренебрежем на данном этапе рассмотрения взаимодействием частиц газа между собой и остановимся на наиболее простом случае полностью симметричного (изотропного) распределения скоростей частиц. В этом случае все три значения $\overline{\rho v_i^2}$ ($i=1$, 2, 3) равны между собой и положительны, тогда как средние значения $\overline{\rho v_i v_j}$ при $i\neq j$ равны нулю.

Тензорные индексы и ученый стиль изложения не должны помешать читателю узнать в обсуждаемом явлении знакомое со школьной скамьи *давление газа*, которое и порождает поток количества движения, когда газ покоится. Тот факт, что $(q_D)_{11}=(q_D)_{22}=(q_D)_{33}$, $(q_D)_{ij}=0$ $(i\neq j)$, означает, что давление направлено по нормали к поверхности при любом расположении этой поверхности; это *закон Паскаля*, относящийся к давлению жидкостей и газов. В тензорной записи $(q_D)=p\delta_{ij}$, где δ_{ij}— символ Кронекера, равный по определению 1 для $i=j$ и 0 для $i\neq j$; можно также написать $q_D=p\boldsymbol{I}$, где $\boldsymbol{I}$ — так называемый единичный тензор, обладающий компонентами δ_{ij}.

Если, наряду с хаотическим движением атомов, газ движется как целое, то полный поток количества движения складывается из двух частей:

$$q_D = \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + p\boldsymbol{I}, \quad \text{т. е.} \quad (q_D)_{ij} = \rho v_i v_j + p\delta_{ij}. \tag{8}$$

В этой формуле $\boldsymbol{v}$ есть средняя скорость (скорость упорядоченного движения), а вклад хаотических скоростей описывается давлением. По порядку величины $p \sim \rho c^2$, где c — скорость звука, так как скорость атомов и молекул мало отличается от скорости звука. Поэтому при медленном дозвуковом движении второй член в правых частях формул (8) гораздо больше первого. Однако в расчет входит всегда сумма сил, действующих на всю поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем.

Если давление p везде одинаковое (не зависит от координат), то для любой замкнутой поверхности (σ) будет $\oint\limits_{(\sigma)} p\, d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$. Значит, существенно только отличие давления от постоянного. Поэтому роль давления оказывается того же порядка, что и роль потока количества движения, переносимого упорядоченным движением газа.

В случае идеального газа давление появилось в результате рассмотрения хаотического движения частиц. Давление в этом случае не связано со столкновениями частиц, с их физическим взаимодействием между собой (отталкиванием, притяжением), соответствующие величины не входят в формулы для давления идеального газа. В частности, можно говорить о давлении бесстолкновительного газа *). Однако если хаотические скорости всегда создают давление, то не всякое давление создается хаотическим движением! Взаимодействие частиц — например, отталкивание одноименных электрических зарядов — также можно описать, пользуясь понятием давления или, точнее, тензора $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{q}_D$ потока количества движения, создаваемого электрическим полем. Подробное рассмотрение этого описания завело бы нас слишком далеко; отметим только, что выражение $T_{ij} = \rho v_i v_j$ справедливо в самом простом случае, в общем случае $T_{ij} = \rho v_i v_j + T'_{ij}$, где T'_{ij} содержит вклад хаотических движений среды, средняя скорость которой есть $\boldsymbol{v}$, и вклад, зависящий от электрических и магнитных полей, описывающих те физические взаимодействия, которые происходят в рассматриваемой системе. Тензор с компонентами T'_{ij} обобщает понятие давления; в простейшем изотропном случае, когда все направления равноценны, $T'_{ij} = p\delta_{ij}$, т.е. имеет место закон Паскаля **).

---

*) Роль столкновений косвенная: они изменяют хаотические скорости частиц, от которых, в свою очередь, зависит давление.

**) Подробный обзор теории давления при различных плотностях и температурах вещества дан в книге Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова «Теория тяготения и эволюция звезд», «Наука», 1971.

Упражнения

1. Получите выражение для вектора потока объема Ω, заполняемого средой, при ее движении в пространстве; потока кинетической энергии T; потока потенциальной энергии U, если на среду воздействует силовое поле так, что элемент dm среды имеет потенциальную энергию $u(x, y, z)\,dm$.
2. Получите выражение для тензора потока момента G количества движения.

§ 7. Уравнение неразрывности на прямой

Вернемся к одномерному упорядоченному движению без разброса скоростей и допустим, что масса каждой порции среды в процессе эволюции не меняется, т. е. масса не возникает и не исчезает. Тогда между функциями $\rho(x, t)$ и $v(x, t)$, характеризующими эту эволюцию, имеется простая связь. В самом деле, выделим мысленно интервал с концами x и $x+dx$, на котором в некоторый момент t находится порция среды массы $dm=\rho\,dx$. За время dt через левый конец внутрь интервала войдет масса $q_m dt$ (см. § 6), а через правый из интервала выйдет масса $(q_m+\partial_x q_m)\,dt$. Разница между этими величинами идет на изменение массы в интервале, т. е.

$$\partial_t(dm)=q_m dt-(q_m+\partial_x q_m)dt=-\partial_x q_m dt. \qquad (1)$$

Отсюда, деля на $dt\,dx$ и перенося все члены в одну сторону, получим

$$\frac{\partial q_m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dm}{dx}\right)=0. \qquad (2)$$

Вспомнив, что $q_m=\rho v$, $dm=\rho\,dx$, приходим окончательно к *уравнению неразрывности*

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0, \qquad (3)$$

выражающему закон сохранения масс.

Ввиду важности этого уравнения повторим вывод, не применяя явно понятия потока. Обратимся к рис. 5. За время dt в рассматриваемый интервал войдет левая заштрихованная порция среды массы $\rho v\,dt$, а выйдет правая заштрихованная порция массы $[\rho v+\partial_x(\rho v)]\,dt$. Отсюда $\partial_t(\rho dx)=-\partial_x(\rho v)\,dt$ и, деля на $dt\,dx$, мы вновь приходим к уравнению (3).

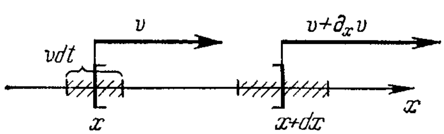

Рис. 5.

Иногда предпочитают пользоваться *интегральной формой* этого уравнения. Именно, выделим мысленно произвольный интервал (a, b) оси x. Массу среды, находящейся на нем в момент t, обозначим через $m_{(a,b)}$. Тогда баланс масс, аналогичный проведенному при выводе соотношения (1), приводит после деления на dt к